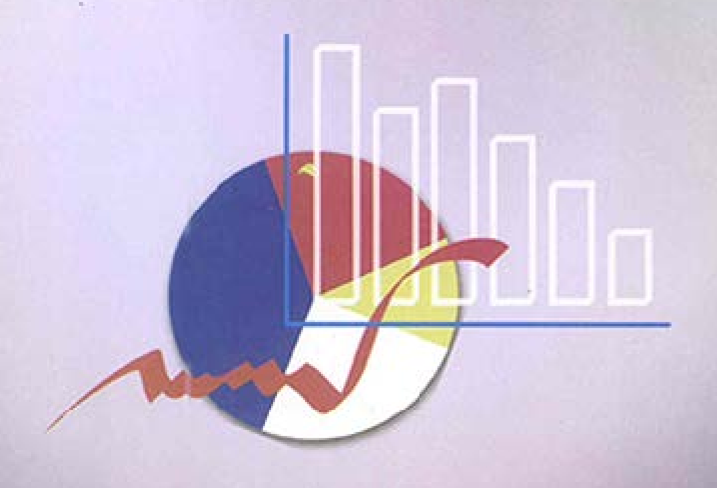
الدكتور . محمد راتول

الإحصاء الوصفي



ديوان المطبوعات الجامعية

الدكتور
محمد راتول

الإحصاء الوصفي

الطبعة الثانية

ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر



رقم النشر: 4.01.4624
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 9961.0. 0836.7
رقم الإيداع القانوني: 2005/1242



بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

الى الأبناء محمد و عبد المالك

مليكة و فاطمة الزهراء

الى أمهم، أجدادهم وجداتهم




economicrg
groups/economicrg
economicrg.blogspot.com
بوابة
الباحث الإقتصـــادي
Economic Researcher Gate

فصول الكتاب


economicrg
groups/economicrg
economicrg.blogspot.com
بوابة
الباحث الإقتصادي
Economic Researcher Gate

مقدمة

الكتاب الذي بين يديك عبارة عن مجموعة من المواضيع المنقحة في الإحصاء الوصفي، قدمتها كمحاضرات في عدة معاهد وكليات لعدة تخصصات في العلوم الإنسانية و بخاصة تخصصات العلوم الإقتصادية و علوم التسيير و تخصصات المدى القصير في المحاسبة و الضرائب و الإعلام الآلي للتسيير، وهذا على فترات متلاحقة، وقد حرصت في تقديمها من خلال هذا الكتاب على البساطة في السرد والمنهجية في العرض، وعلى التوضيح عن طريق الأمثلة المباشرة في معظم المواضيع، حرصا على الإيضاح والفهم السريع، والإستيعاب الجيد، وذلك عبر تسعة فصول أساسية معروفة في تقديم مقياس الإحصاء الوصفي، مراعيا الفترة الزمنية اللازمة لتدريس هذا المقياس للمستويات الجامعية، وهي إما سداسي واحد، بحجم ثلاث ساعات محاضرات و ساعتين أعمال موجهة أسبوعيا أو سنويا بحجم ساعة و نصف محاضرات و ساعة و نصف أعمال موجهة، و أنهيت كل فصل بمجموعة من التمارين بعض معطياتها إفتراضي و الآخر عبارة عن بعض المؤشرات الإقتصادية و الإجتماعية مصدرها الديوان الوطني للإحصائيات أساسا، تكون عبارة عن سلاسل من التمارين يُلزم الطلبة على تحضيرها لتكون قاعدة عمل في حصص الأعمال الموجهة، وقد تعمدت تقديم كل العلاقات الرياضية بالحروف اللاتينية، لكون معظم المراجع المتواجدة في المكتبات تقدمها عادة بهذه الحروف إضافة الى أنها شائعة الإستخدام في معظم التخصصات العلمية الجامعية .

وإذ أقـدم هـذا العمـل المتواضـع لطلبتنـا في الجـذوع المشـتركة في شـتى العلـوم الإنسـانية و في بعـض التخصصـات مـن الطـور الثـانوي، فـإنني أرجـو أن أكـون قـد قدمـت عمـلا مفيـدا في تقريـب مـادة الإحصـاء الوصفـي مـن الطـالب ، وتوفـير مرجـع إضـافي في مكتباتنـا، كمـا أرجـو أن يكـون في مسـتوى الجـهد المبذول في تأليفه و إخراجه علـى هـذا النحـو.

و حيث أن بدايـة كـل عمـل قـد تشـوبها بعـض النقـائص، فـإنني أنتظر مـن القـاريء كـل ملاحظـة أو تنبيـه علـى خطـأ أو رأي في المنهجية أو غـير ذلـك، لنتمكـن مـن تنقيحـه و تحسـينه و إسـتدراك نواقصه في طبعة مواليـة إن شـاء الله.

الأسـتاذ : محمـد راتـول.



الفصل الأول

الإحصاء، مفاهيم، إستخدامات و منهجية.

كلمـة الإحصـاء مصطلـح شـائع الإسـتخدام في مختلـف مجـالات العلـوم، خاصـة العلـوم الإقتصاديـة والتجاريـة و علـوم التسيير عامـة، إذ أن معظـم القـرارات في هـذا المجـال، تعتمـد علـى الدراسـات الإحصائيـة، أو تسـتخدم الإحصـاء في اسـتدلالاتها، ويـهدف هـذا الفصـل الى التعريـف بالإحصـاء، ومجـالات إستخدامه ومنهجية إجـراء البحـوث الإحصائيـة و مفرداتهـا.

أولا : مفهوم الإحصاء : قبـل الولـوج في تقـديم الإحصـاء الوصفي كمـادة تسـتند الى أسـس علميـة ثابتـة ومحـددة، لابـد أولا من توضيح المدلـول العلمـي للإحصـاء بصفـة عامـة، و مـا يتصـل به، لكون كلمة الإحصـاء كثـيرا مـا تتداخـل مـع كلمـة تعـداد أو كلمة إحصائيـات، أو إحصـاءات لـدى الكثـير مـن الطلبـة، علـى الرغم مـن الفـرق الشاسـع بـين هـذه المصطلحـات، ولإزالـة هـذا التداخل نعطي التعـاريف التاليـة:

1- تعداد : يقصـد بكلمـة التعـداد في أدب المعـاملات في البحـوث الإقتصاديـة والإجتماعيـة و الإنسـانية عامـة، عمليـة العـد التي تقوم بها أجـهزة مختصـة تابعـة لهيئـات رسميـة (هيئـات الدولـة) في الغالب، و ذلـك بهـدف الحصـول علـى معطيـات حـول ظـاهرة أو مجموعـة مـن الظواهـر لغـرض محـدد أو غـير محـدد، فـهو إذن عملية الحصر الكمـي للظواهـر.

2- إحصائيات : يقصـد بكلمـة إحصائيـات (إحصـاءات)، كـل المعلومات العدديـة المتعلقـة بظواهـر أو نشـاطات معينـة، والـتي قـد تكـون مقدمـة في شـكل جـداول أو أشـكال إحصائيـة مختلفـة، سواء كـان هـذا التقـديم منشـورا في كتيبـات خاصـة أوفي مجـلات أو دوريـات، أو وثـائق إداريـة أو غيرهـا، وعلـى هـذا فإننـا نعتـبر

مثلا، أن الأرقام المقدمة في مجلة ما والمتعلقة بتطور السكان، أو المتعلقة بالإنتاج الداخلي الإجمالي، أو المتعلقة بمبيعات مؤسسة ما، إحصائيات، فالإحصائيات إذن هي نتيجة عملية العد.

تعريف 1-1 : يقصد بالإحصائيات كل المعطيات الرقمية، المتعلقة بظواهر إقتصادية أو إجتماعية... التي تجمعها هيئات مختصة سواء على مستوى النشاط أو على مستوى مجموعة الأنشطة، والمقدمة بأساليب علمية في وثائق رسمية أو غير رسمية، لخدمة غرض محدد.

و يظهر إذن أن عملية التعداد هي أداة لتوفير المعطيات الإحصائية وبتعبير آخر هي أداة لتوفير الإحصائيات.

إن تجميع المعطيات العددية لمختلف الظواهر، حسب هذا المفهوم يعود الى أقدم العصور، حيث كانت تنظيمات القبائل والعشائر، تلجأ لأسلوب العد سواء لتحديد عدد السكان الخاضعين للضريبة أو الخدمة العسكرية، أو تحديد الأملاك كالماشية أو الإبل.. الخ. غير أن عملية الإحصاء كانت عموما من مهام الحكومة، وقد أنشئت لأجلها أجهزة خاصة تطورت مع الزمن، ومع تطور العلوم، من إستخدام الوسائل البدائية الى استخدام التقنيات العالية، كأجهزة الإعلام الآلي، لتخزين ومعالجة المعلومات المحصل عليها، وأصبح الإقتصادي أو الباحث الذي يريد إستخدام الإحصائيات في بحوثه من السهل عليه الحصول عليها من منشورات الهيئات الرسمية دون الحاجة الى إجراء جمع المعطيات الإحصائية بنفسه.

في الجزائر نجد أن الهيئة الوطنية التي تقوم بجمع المعطيات الإحصائية ومعالجتها من مختلف الأنشطة الإقتصادية والاجتماعية عبر الوطن، هي **الديوان الوطني للإحصائيات،** وهو الهيئة الرسمية الأساسية، منتشرة عبر ربوع الوطن من

خلال ملحقاتها الجهوية في كل من الجزائر، وهران، بشار، قسنطينة، عنابة وورقلة.

نبذة حول الديوان الوطني للإحصائيات كما يقدمها عن نفسه
(أنظر: www.ons.dz/st1.htm)

الديوان الوطني للإحصائيات، مؤسسة مركزية للإحصائيات بالجزائر و هي ذات طابع إداري مكلفة بجمع و معالجة و نشر المعلومات الإحصائية الإجتماعية و الإقتصادية مثل إحصاء السكان و السكن، مسح حول المؤسسات الصناعية ..الخ، الديوان الوطني للإحصائيات تحت وصاية الوزير المنتدب لدى رئيس الحكومة المكلف بالتخطيط.

أنشيء الديوان سنة 1964 تحت اسم المحافظة الوطنية لإحصاء السكان، و هذا لغرض القيام بإنجاز الإحصاء الأول للسكان في الجزائر المستقلة سنة 1966، و في سنة 1971 تم تغيير تسميته ليصبح المحافظة الوطنية للإحصائيات و المسوحات الإحصائية، و قد تم إنجاز أعمال معتبرة خلال هذه الفترة مثل الإحصاء الثاني للسكان و السكن سنة 1977 و المسح الديموغرافي خلال 1972-1973 و المسح الخرائطي خلال 1972-1975، و الذي يعتبر قاعدة لإنجاز الإحصاء و مسح إستهلاك الأسر في 1979-1980.

و تمت إعادة هيكلة الجهاز و إنشاء الديوان الوطني للإحصائيات الحالي بمقتضى المرسوم التشريعي رقم 82-484 المؤرخ في 18 ديسمبر 1982 و المعدل بموجب المرسوم رقم 85-311 بتاريخ 17 ديسمبر 1985، و قد أعيد تنظيمه بموجب المرسوم 95-159 بتاريخ 3 جويلية 1995.

من مهام الديوان الوطني للإحصائيات، أنه يسهر على إعداد و توفير و نشر المعلومات الموثوق بها و المنتظمة و المتماشية و حاجيات الأعوان الإقتصاديين و الإجتماعيين، و يعمل على ضمان التوفير المنتظم للمعلومات و التحاليل الإحصائية و الدراسات الإقتصادية الضرورية لإعداد و متابعة السياسات الإقتصادية و الإجتماعية التي تعدها السلطات العمومية، فهو يعد و ينشر الأرقام الإستدلالية و مؤشرات الإقتصاد الوطني و حسابات الأمة، و يسير التسجيلات الإحصائية و المسوحات و الأعمال الإحصائية و يعد و يحين فهرس الأعوان الإقتصاديين و الإجتماعيين و هذا بتخصيص رقم تعريفي إحصائي لكل عون.



ومن أضخم انجازات الديوان هو تعداد السكان، وكان أهم عمل قام به بهذا الخصوص هو التعداد العام لسنة 1977، وكذلك الذي أجراه سنة 1987، و سنة 1998، كما يقوم كذلك بإجراء وجمع احصائيات حول معظم النشاطات الإقتصادية والإجتماعية، كالتشغيل، الصحة، التعليم، الفلاحة، الصناعة، النقل، البريد والمواصلات، التجارة الخارجية، الأسعار، المالية، الحسابات الوطنية... الخ. كما يقوم الديوان بمعالجة هذه البيانات ونشرها في مطبوعاته الخاصة، أهمها المجموعة الإحصائية السنوية، وهي عبارة عن مطبوع من الحجم الكبير يتضمن معطيات إحصائية عن كل الأنشطة الإقتصادية والإجتماعية للوطن، و من ذلك السكان والسكن، نشاطات الصحة و التربية و التعليم و التكوين، الأنشطة الإقتصادية كالصناعات و التجارة الداخلية و الخارجية، الأسعار والمداخيل، و الشؤون المالية و الحسابات الوطنية، كما يصدر هذه الإحصائيات ملخصة أيضا من خلال مجلة الجزائر بالأرقام، و يقوم ببعض التحليلات من خلال مجلة إحصائيات، التي ينشر فيها أيضا بعض الدراسات التي يقوم بها، كما يصدر أيضا بعض الكتيبات والدوريات الأخرى التي تهتم إما بنشر ملخصات إحصائية أو دراسات حول ظاهرة ما، أومجموعة من الظواهر.

ان جمع المعطيات الإحصائية ونشرها وحده لايكفي، إذ لابد من إستخدام هذه المعطيات في مختلف الميادين التحليلية، لغرض حصر الإمكانيات، والاستخدام الأمثل لها، في مجالات التخطيط والتنبؤ واتخاذ القرارات، وذلك بأساليب وفنيات معينة يتنأولها علم الإحصاء.

3- علم الإحصاء: يختلف مصطلح الإحصاء عن الإحصائيات بالمفهوم الذي أعطيناه آنفا، و عموما يقصد بلفظ الإحصاء في المجال الأكاديمي علم الإحصاء و هو علم متطور باستمرار كغيره من العلوم، فما هو علم الإحصاء إذن؟.

تعريف 1-2: الإحصاء هو علم يدرس مختلف طرق و وسائل جمع البيانات الكمية عن مختلف الظواهر الإقتصادية والإجتماعية... وترتيبها وتبويبها وتحليلها وتفسيرها، وتقديمها بأشكال وصور ملائمة بهدف تسهيل اتخاذ القرار على أساس سليم.

أي أنه يهدف الى دراسة كيفية جمع المعلومات الكمية عن الظواهر الإقتصادية والإجتماعية و الطبيعية...، وكيفية تحويلها الى جداول أوأشكال معينة، لتسهيل فهمها واستخدامها، كما يهدف أيضا الى تقديم الأساليب المختلفة التي تستخدم لتحليل هذه المعلومات سواء كانت هذه الأساليب وصفية أو رياضية، وبناء على هذا فإن الموضوعات التي يتنأولها علم الإحصاء هي :

- طرق ووسائل جمع المعلومات الكمية عن الظواهر.
- تصنيف تلك المعلومات و ترتيبها.
- تقديم تلك المعلومات بأشكال وصور ملائمة.
- تحليل المعلومات المحصل عليها، واستقراء النتائج، واستخدامها في مجالات التنبؤ و التحضير لإتخاذ القرارات.

فعلم الإحصاء اذن بهذا المفهوم علم واسع، بطرقه المختلفة و قوانينه المتعددة وأسسه الثابتة و نظرياته العلمية و تطبيقاته الواسعة الإنتشار، وله علاقات متشعبة و متبادلة مع مجمل العلوم الأخرى، حيث يؤثر فيها ويتأثر بها.

إن إضفاء الصفة العلمية على الإحصاء راجع لكونه يتميز بكل مواصفات العلوم الأخرى، إذ يستخدم طرق البحث



العلمي المعروفة كالطريقة الإستقرائية أو الطريقة الإستنباطية، كما أن له موضوعا وهدفا محددا، يتم الوصول اليه بإتباع المنهجية العلمية، إضافة الى أن له قوانين و نظريات ثابتة وصالحة في كل زمان ومكان، كما أنه يستخدم من طرف الكثير من العلوم، بل و هناك من العلوم ما يعتبر الإحصاء مقومها الرئيسي، و بدوره تعتبر الرياضيات أداته الأساسية.

تقليديا تدخل المواضيع التي تتعلق بدراسة طرق ووسائل جمع البيانات الكمية وتصنيفها و تبويبها ضمن جداول إحصائية وكذا تقديم وسائل تحليلها الوصفية، ضمن ما يسمى **بالإحصاء الوصفي**، الذي هو موضوع هذا الكتاب، بينما تدخل عمليات التحليل المعمق للبيانات الإحصائية واستقراء النتائج و إختبار الفرضيات و الإحتمالات الى غير ذلك من المواضيع، ضمن ما يسمى **بالإحصاء الرياضي** أو **الطرق الإحصائية**، وعمليا يعتبر الإحصاء الوصفي كمدخل أساسي لعلم الإحصاء الواسع، لكونه يقدم المباديء الأولى التي يجب على الإحصائي الإلمام بها، كي يتمكن من الولوج في أعماق الإحصاء و التمكن بالتالي من إجراء دراسات إحصائية علمية معمقة.

ومن الأدوات الهامة التي تدخل ضمن وسائل وصف الظواهر والتي تدخل ضمن الإحصاء الوصفي و التي سنتناولها في هذا الكتاب ما يلي :

- العرض الجدولي و البياني للمعلومات الإحصائية.
- مقاييس النزعة المركزية.
- مقاييس التشتت.
- أشكال التوزيعات.
- الإنحدار والإرتباط.
- السلاسل الزمنية.
- الأرقام القياسية و معدلات النمو.



ثانيا: مجالات إستخدام الإحصاء: يستخدم علم الاحصاء في معظم مجالات الحياة اليومية، وفي مجالات البحوث العلمية المختلفة، فعلم الاقتصاد، يستخدمه في تحليل الظواهر وإبراز العلاقات بينها وفي مجال التخطيط وغير ذلك، و العلوم الطبية والبيولوجيا بصفة عامة، تستخدمه في حصر نتائج التجارب ودراستها... وكذلك بالنسبة للعلوم الاجتماعية و الادارية، فهي تعتمد إعتمادا واسعا على الإحصاء. غير انه تنبغي الاشارة الى أن علم الاحصاء يعمل دائما في الاتجاه الذى يحدده له العلم الذى يستخدمه.

ثالثا: أنواع البحوث الإحصائية : وفقا للتعريف السابق للإحصاء، فإنه يمكن تقسيم البحوث الإحصائية الى ثلاثة أنواع هي :

1- البحوث الإحصائية الوصفية : وهي البحوث التي تجمع فيها البيانات عن الظواهر، بهدف توفيرها وعرضها لتستخدم لأغراض معينة من طرف باحثين آخرين، فهدف جمع البيانات في هذا النوع من البحوث لايكون محددا سلفا، ومن أمثلة ذلك، البحوث التي يقوم بها الديوان الوطني للإحصائيات، كالتعداد العام للسكان وإحصائيات التجارة الخارجية، والأنشطة الصناعية وغيرها.

2-البحوث الإحصائية التحليلية : وهي البحوث التي تجمع فيها البيانات عن الظواهر لأجل خدمة هدف محدد من طرف الباحث، سواء كان الباحث شخصا طبيعيا أو إعتباريا، وسواء قام هو نفسه بجمع البيانات الإحصائية من مصادرها المباشرة أو إعتمد على إحصائيات معدة من طرف باحث آخر أو هيئة إحصائية، و بمعنى آخر هي البحوث التي تهدف الى تحليل ظاهرة ما للوصول الى هدف محدد سلفا، ومن أمثلة ذلك، البحوث

التي تجرى لغرض معرفة مستوى التغذية في إحدى الولايات، أو البحوث التي تهدف الى معرفة مستوى البطالة في مجتمع ما... الخ.

3-البحوث الإحصائية التجريبية : وهي البحوث التي تجرى لغرض محدد سلفا، فهي بذلك بحوث تحليلية من جانب، غير أن ظروف إنجازها تخضع للباحث نفسه، فهو يتحكم في توفير الظروف المساعدة لإنجاز البحث، وهذا هو الفرق بينها وبين البحوث التحليلية، و تجرى هذه البحوث في غالب الأحيان في الدراسات الفلاحية و البيولوجية عامة.

رابعا: منهجية البحث الاحصائي : لأجل إجراء أي عمل إحصائى لابد من اتباع منهجية منطقية تؤدى بالباحث في النهاية الى إجراء العمل الإحصائي في أقصر وقت وبأقل تكلفة وجهد ممكنين. ويمكن تلخيص محاور هذه المنهجية في النقاط الرئيسية المرتبة في شكل مراحل كمايلي:

المرحلة 1 : تحديد الظاهرة المدروسة.

المرحلة 2: جمع البيانات الاحصائية.

المرحلة 3 : تصنيف وتبويب البيانات.

المرحلة 4: تحليل البيانات إحصائيا، و استقراء النتائج.

1 - المرحلة الأولى: التحديد الدقيق للظاهرة المدروسة :أول مرحلة في البحث الاحصائي، هي التحديد العام للظاهرة المدروسة، إذ على الباحث أن يحدد بكل دقة الهدف من الدراسة الاحصائية، ثم المجتمع الاحصائي و مكانه و الوقت المناسب لجمع البيانات حوله، والصفات المطلوب معرفتها ووحدات القياس المستخدمة.

أ - تحديد الهدف، مكان و زمان دراسة الظاهرة :

إن تحديد الهدف من الدراسة الاحصائية و المكان و الزمان

المناسب لجمع البيانات هو أول ما يجب على الباحث أن يحدده بكل دقة، وذلك من خلال الإجابة على الأسئلة التالية:

- لماذا يتم إجراء هذه الدراسة، أي ماهو الغرض أو الهدف من جمع البيانات الإحصائية حول الظاهرة ؟

-أين توجد الظاهرة المدروسة ؟ أي التحديد المكاني لها.

- ماهي الفترة الزمنية المناسبة لأجراء عملية جمع البيانات؟ صباحا أم مساء، صيفا أم شتاء... ؟.

فإذا ما كانت الظاهرة المدروسة مثلا، هي مدى كفاية المنحة الوطنية لاحتياجات الطالب الشهرية، فإن الهدف المراد الوصول اليه هو ناتج الاجابة على السؤال التالي : هل المنحة المقدمة للطالب كافية لمصاريفه المتعلقة بالدراسة أم لا؟ وما هي هذه المصاريف ؟ و ماهي قيمها؟ وبعد تحديد الهدف علينا أن نحدد مكان وجود الظاهرة المدروسة، و مادام الامر يتعلق بدراسة مدى كفاية المنحة الدراسية للطالب، لذلك فان المكان الذى تجرى فيه عملية جمع البيانات هو الجامعة، وعلينا ان نحدد بعد ذلك أي جامعة تجرى فيها العملية، هل في وسط البلاد أم في غربها أم تجرى في جميع جامعات البلاد ؟ ثم أخيرا علينا أن نحدد العناصر التي ينبغي أن نجرى عليها العملية وأن نحدد وحدات قياس الكميات،هل تقاس بالوحدات النقدية مثلا، أم بوحدات الأوزان أم بغير ذلك ؟. إن الاجابة على جميع هذه الاسئلة، تفيد الباحث في مجالات عديدة منها:

-عدم بذل المجهودات في سبيل الحصول على معلومات غير مفيدة للدراسة وبالتالي عدم إضاعة الوقت والجهد و المال.

- عدم اهمال الحصول على بعض المعلومات التي قد تكون هامة وضرورية للدراسة.

- ضمان الحصول على بيانات ذات مصداقية



- التمكن من حصر الوسائل المادية والبشرية الضرورية لأجل إجراء الدراسة.

ب - المجتمع الاحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة:

إن تحديد المجتمع الاحصائي أمر في غاية الأهمية، ويعرف **المجتمع الإحصائي** بأنه مجموع **الوحدات الاحصائية** التي تقع عليها الدراسة الاحصائية، فإذا كان الهدف هو إجراء عملية إحصائية حول النفقات اليومية للطالب في جامعة ما مثلا، فإن المجتمع الإحصائي هو مجموع طلبة هذه الجامعة، والوحدة الإحصائية هي الطالب الفرد، **فالوحد ة الإحصائية** هي العنصر الأولي محل الدراسة الإحصائية، أو هي القيمة المادية أو المعنوية التي تقع عليها الدراسة الإحصائية.

و الوحدة الإحصائية لظاهرة ما تكون من نوع معين ذي صفات مشتركة نستطيع عن طريقها تصنيفها في مجموعة إحصائية واحدة هي **المجتمع الإحصائي**، وقد تحتوي الوحدة الإحصائية عنصرا واحدا أو مجموعة من العناصر المشتركة بينها يتم الإستقصاء عنها، ويسمى هذا العنصر أو العناصر بالصفة أوالصفات، فعند الدراسة الإحصائية لمجتمع طلابي مثلا، فإنه يمكن التكلم عن مجموعة من الصفات المشتركة، ومنها الفرع الذي ينتمي إليه الطالب، التخصص، الجنس، ... الخ، و تسمى مثل هذه الصفات **بالصفات النوعية**، و إذا ما كانت الدراسة الإحصائية تتعلق بمردودية مجموعة من المؤسسات مثلا، فإن الصفات المشتركة التي يمكن التكلم عنها هي حجم الإنتاج فيزيائيا أو نقديا، تكاليف الإنتاج، الأرباح... الخ، و مثل هذه الصفات تسمى **بالصفات الكمية**.

وعموما نقول بأن للوحدة الإحصائية **صفة نوعية**، إذا لم تكن هذه الصفة قابلة للقياس كالجنس أو الرتبة أو التخصص...الخ،



و نقول بأن للوحدة الإحصائية **صفة كمية** إذا كانت هذه الصفة قابلة للقياس عن طريق وحدة من وحدات القياس.

و قد تكون وحدات القياس أشياء **معدودة** كعدد الطلبة أو التجار مثلا، أو وحدات **قياس طبيعية أو فيزيائية** سواء كانت بسيطة كالكيلوغرام والمتر وأجزائهما وأضعافهما أو مركبة كالمتر\الثانية أو اللتر \الثانية، وقد تكون **وحدات نقدية** كالدينار أو الدولار.

ويمكن لعناصر الوحدة الإحصائية أن تجمع بين الصفتين الكمية والنوعية في آن واحد.

2- المرحلة الثانية: جمع البيانات الاحصائية : إن جمع البيانات الاحصائية من أساسيات العمل الاحصائي، ولهذه المرحلة أهمية خاصة، في أي بحث إحصائي، إذ أن توفر البيانات الاحصائية الدقيقة والسليمة عن الظاهرة المدروسة، يعطي نتائج سليمة، ويساعد على اتخاذ قرار سليم بناء على تلك النتائج، وعلى الباحث أن يحدد مصدر جمع البيانات المرغوب فيها، وأساليب وطرق ذلك، قبل البدء في العملية.

أ - مصادر جمع البيانات : مصادر جمع البيانات هي المنابع التي يأخذ منها الإحصائي البيانات موضع الدراسة، وقد تكون هذه المصادر مباشرة و قد تكون غير غير مباشرة.

* **مصادر مباشرة**: في هذه الحالة يجمع الإحصائي معلوماته إما بالإتصال و الإحتكاك المباشر بوحدات المجتمع الاحصائي أو بالإعتماد على الوثائق التي تكون فيها المعلومات لازالت خاما.

* **مصادر غير مباشرة** : في هذه الحالة يتم الحصول على البيانات من مصادرها غير الأولية، حيث تكون مبوبة ومصنفة من قبل باحثين سابقين أو هيئات رسمية، أوغير رسمية،

وتم نشرها في نشرات خاصة أو دوريات، أوتكون محفوظة في الأرشيف التقليدي أو الآلي.

ب- أساليب جمع البيانات من المصادر المباشرة :

يمكن جمع البيانات الإحصائية بأحد الأسلوبين التاليين:

* **أسلوب الحصر الشامل** : في هذه الحالة، تتم دراسة كل وحدات المجتمع الإحصائي أي أخذ المعلومات المراد الحصول عليها مباشرة من الوحدة الإحصائية، ومن مميزات هذا الأسلوب أنه يوفر حظوظ الحصول على معلومات دقيقة إذا ما توفرت شروط البحث الإحصائي، الشيء الذي يجعل نتائج الدراسة الإحصائية غير مشكوك فيها، غير أن أهم عيوبه إرتفاع التكاليف لكون عملية الحصر الشامل تتطلب وسائل مادية وبشرية ضخمة، كما أن هذا الأسلوب لايتماشى مع الدراسات التي يلعب الوقت فيها دورا حاسما، كما أنه كلما كان حجم المجتمع كبيرا كلما كان إحتمال الخطأ كبيرا، ونظرا لكون هذا العمل شاملا ويتطلب وسائل مادية و بشرية ضخمة، لذلك فهو في غالب الأحيان من مهمة الحكومات خاصة إذا ما كان يتعلق بدراسات سوسيولوجية.

* **أسلوب العينات** : العينة تعريفا هي جزء من المجتمع المراد دراسته، وتحدد بعدة طرق، منها طريقة العينة العشوائية البسيطة، وطريقة العينة الطبقية، والعنقودية و المنتظمة.

ومن الأسباب الرئيسية لإنتهاج هذا الأسلوب مايلي :

– أن العينة يمكن أن تمثل كل المجتمع الإحصائي من حيث المميزات والخصائص.

– الإقتصاد في الوقت والجهد و المال.

– إستحالة فحص جميع وحدات المجتمع الاحصائي، فمثلا عندما يريد الباحث معرفة المواد أو المعادن التي تتكون منها تربة

منطقة ما، فإنه يستحيل عليه فحص كل التربة، و يكفي لذلك أن يأخذ كميات من التربة من مناطق مختلفة ويفحصها ويستخرج النتيجة.

- كما أنه في بعض الحالات تؤدي دراسة الوحدة الاحصائية الى اتلافها، فعند دراسة مكونات حبات البيض مثلا في حضيرة ما، فان دراسة كل المنتوج تؤدي الي اتلافه كلية، لذلك يلجأ الي دراسة عينة منه فقط، وفق معايير محددة، وتعميم النتائج على جميع وحدات المجتمع، و في التحاليل الطبية يلجأ المختبر الى أخذ عينات فقط من دم الإنسان لتحليلها لأن سحب كامل كميات الدم منه لتحليلها تؤدي الى هلاكه.

- عدم إمكانية إجراء أسلوب الحصر الشامل، فيكون الباحث ملزما باستخدام أسلوب العينات كما في حالة دراسة الأسماك أو الطيور أو الحيوانات الغابية.

- وجود قيود الزمن و التكاليف المخصصة لإنجاز عملية الإحصاء، إذ قد لا تسمح هذه القيود بإجراء العملية بأسلوب المسح الشامل.

و تختار العينة بمجموعة من الطرق منها ما يلي:

** **العينات العشوائية**: و هناك عدة طرق لإختيارها منها ما يلي:

- **طريقة العينة العشوائية البسيطة**: في هذه الطريقة تؤخذ العينة بشكل يعطي لأي عنصر من عناصر المجتمع نفس الفرصة لأن يكون ضمن العينة، وتؤخذ العينة بإحدى الطريقتين، إما أن يتم خلط وحدات المجتمع الإحصائي خلطا جيدا، ويتم أخذ وحدات العينة بصفة عشوائية، بحيث يكون لكل وحدة نفس إحتمال الظهور، وإما بإستخدام جداول الأرقام العشوائية و يتم ذلك كما يلي:

نعطي كل عناصر المجتمع الإحصائي أرقاما متسلسلة من 0 الى N-1، حيث N عدد وحدات المجتمع، وبحيث يكون لكل رقم من عناصر المجتمع أعدادا تساوي عدد أرقام حجم المجتمع، فإذا كان حجم المجتمع 53 مثلا، فان كل وحدة في المجتمع الإحصائي تعطى رقما مكونا من عددين بدء من : 00 01 02...... 10 11 .... 52، وإذا كان حجم المجتمع 625 مثلا، فإن كل وحدة من وحدات المجتمع تأخذ رقما مكون من 3 أعداد بدء من : 000 001 002... 010 011 ... 099 100 101 .... 623 .... 624. وهكذا...

نأخذ صفحة من صفحات الجداول العشوائية (أنظر الصفحة الموالية)، ونختار عمودا يكون عدد أرقامه مساويا لعدد أرقام حجم المجتمع، ونأخذ كل الأرقام المحصورة ضمن المجال ونلغي البقية.

مثال1-1: نريد إختيار عينة تتكون من 10 طلبة من مجتمع طلابي مكون من 400 طالب بطريقة العينة العشوائية البسيطة، وبإستخدام جداول الأرقام العشوائية. بين كيف يتم ذلك ؟.

نعطي كل طالب رقما من الأرقام التالية : 000 001 002 ...003 009 010 011 012 ...013 020 021 022 ...023 099 100 101 102 ...103 200 201 ..203 300 301 302 ...303 397 398 .399

نأخذ صفحة من صفحات جداول الأرقام العشوائية، و نعين عمود يتكون من 3 أرقام ونأخذ على التوالي 10 أرقام من الأرقام التي نصادفها ضمنه والتي تكون محصورة بين 000 و399، ويكون الطالب الذي يحمل رقما من الأرقام العشرة المأخوذة من ضمن عناصر العينة المختارة.



صفحة من جداول الأرقام العشوائية

31 75 15 72 60	68 98 00 53 39	15 47 04 83 55	88 65 12 25 96	03 15 21 91 21
88 49 29 93 82	14 45 40 45 04	20 09 49 89 77	74 84 39 34 13	22 10 97 85 08
30 93 44 77 44	07 48 18 38 28	73 78 80 65 33	28 59 72 04 05	94 20 52 03 80
22 88 84 88 93	27 49 99 87 48	60 53 04 51 28	74 02 28 46 17	82 03 71 02 68
78 21 21 69 93	35 90 29 13 86	44 37 21 54 86	65 74 11 40 14	87 48 13 72 20
41 84 98 45 47	46 85 05 23 26	34 67 75 83 00	74 91 06 43 45	19 32 58 15 49
46 35 23 30 49	69 24 89 34 60	45 30 50 75 21	61 31 83 18 55	14 41 37 09 51
11 08 79 62 94	14 01 33 17 92	59 74 76 72 77	76 50 33 45 13	39 66 37 75 44
52 70 10 83 37	56 30 38 73 15	16 52 06 96 76	11 65 49 98 93	02 18 16 81 61
57 27 53 68 98	81 30 44 85 85	68 65 22 73 76	92 85 25 58 66	88 44 80 35 84
20 85 77 31 56	70 28 42 43 26	79 37 59 52 20	01 15 96 32 67	10 52 24 83 91
15 63 38 49 24	90 41 59 36 14	33 52 12 66 65	55 82 34 76 41	86 22 53 17 04
92 69 44 82 97	39 90 40 21 15	59 58 94 90 67	66 82 14 15 75	49 76 70 40 37
77 61 31 90 19	88 15 20 00 80	20 55 49 14 09	96 27 74 82 57	50 81 69 76 16
38 68 83 24 86	45 13 46 35 45	59 40 47 20 59	43 94 75 16 80	43 85 25 96 93
25 16 30 18 89	70 01 41 50 21	41 29 06 73 12	71 85 71 59 57	68 97 11 14 03
65 25 10 76 29	37 23 93 32 95	05 87 00 11 19	92 78 42 63 40	18 47 76 56 22
36 81 54 36 25	18 63 73 75 09	82 44 49 90 05	04 92 17 37 01	14 70 79 39 97
64 39 71 16 92	05 32 78 21 62	20 24 78 17 59	45 19 72 53 32	83 74 52 25 67
04 51 52 56 24	95 09 66 79 46	48 46 08 55 58	15 19 11 87 82	16 93 18 33 61
15 88 09 22 61	17 29 28 81 90	61 78 14 88 98	92 52 52 12 83	88 08 16 00 98
71 92 60 08 19	59 14 40 02 24	30 57 09 01 94	18 32 90 69 99	26 85 71 92 38
64 42 52 81 08	16 55 41 60 16	00 04 28 32 29	10 33 33 61 68	65 61 79 48 34
79 78 22 39 24	49 44 03 04 32	81 07 73 15 43	95 21 66 48 65	13 65 85 10 81
36 33 77 45 38	44 55 36 46 72	90 96 04 18 49	93 86 54 46 08	93 17 63 48 51

(إذا لم يكفي عمود واحد لإختيار العينة ننتقل الى عمود آخر).

تجدر الإشارة الى أن العينة العشوائية البسيطة يمكن أن تسحب بأحد الأسلوبين، إما السحب بدون إعادة، أي رفض الرقم الذي سبق وأن أخذ، أو السحب مع الإعادة، أي قبول مرة أخرى الرقم الذي سبق وأن أخذ.

- **طريقة العينة الطبقية**: تستخدم هذه الطريقة في الحالات التي تكون فيها نتيجة البحث تعتمد على العمر أو الجنس أو المكان أو الدخل... الخ، ويتم في هذه الحالة تقسيم المجتمع الإحصائي الى مجموعات جزئية تعتمد على هذه الصفات وتسمى بالطبقات، ثم باستخدام طريقة العينة العشوائية البسيطة يتم إختيار عينة جزئية من كل طبقة يتناسب حجمها مع حجم الطبقة، وتشكل مجموعة العينات الجزئية المختارة، ما يسمى بالعينة الطبقية.

تستخدم العينة الطبقية لعدة أسباب منها ما يلي :

- قد تكون هذه الطريقة مناسبة من الناحية الإدارية.
- قد يكون هناك تمايزا واضحا بين طبقات المجتمع الإحصائي.
- قد تكون خاصية من خواص المجتمع تختلف إختلافا كبيرا من منطقة لأخرى أو من فئة لأخرى.

- **طريقة العينة العنقودية**: في بعض الأحيان يرى الإحصائي بأن الطريقتين السابقتين غير مناسبتين لإختيار العينة، فيلجأ الى طريقة العينة العنقودية، حيث يقوم بتقسيم المجتمع الإحصائي الى مجموعات جزئية واضحة، ثم نختار من كل مجموعة جزئية بمجموعة جزئية أخرى أقل منها تسمى عنقودا، ثم نختار من هذه العناقيد بطريقة العينة العشوائية البسيطة عينات



جزئية، بحيث تشكل مجموعة العينات الجزئية هذه ما يسمى بالعينة العنقودية.

- **طريقة العينة المنتظمة:** في هذه الطريقة تكون قاعدة إختيار عناصر العينة وفق نظام معين، فإذا ما أردنا التعرف على مدى كفاية المنحة الدراسية للطلبة بإستخدام هذه الطريقة مثلا، نقوم بأخذ مكان عند المدخل الرئيسي للجامعة، ونستجوب كل عاشر أو كل خامس طالب يدخل الى الحرم الجامعي، أو أن نعطي الطلبة أرقاما من 0 الى N-1، ونختار رقما عشوائيا ضمن هذا المجال، كأن نختار الرقم 5 مثلا بصفة عشوائية، ونضيف في كل مرة رقما ثابتا بصفة تسلسلية وتكون الأرقام المحصل عليها هي أرقام الطلبة الذين يشكلون العينة، فإذا أردنا أن يكون حجم العينة 12 طالب واخترنا و كان الرقم الأول المختار عشوائيا هو 8 مثلا، و الرقم المضاف بانتظام هو 10 مثلا، فإن أرقام الطلبة الذين يشكلون العينة هم :

8 18 28 38 48 58 68 78 88 98 108 118

و يلاحظ أن هذه الأرقام مأخوذة بانتظام و هذا ماجعلنا نسمي هذه الطريقة بطريقة العينة المنتظمة.

**** العينات غير العشوائية:** و هي التي لا تخضع لقانون العشوائية، إنما يتم إختيارها بانحياز، لإعتبارات تعود للباحث الإحصائي و منا ما يلي:

- **العينة السهلة المنال:** في هذا النوع من العينات يكون المعيار الوحيد المتخذ هو سهولة حصول الباحث على مفردات العينة، تستخدم في الغالب في البحوث الإستطلاعية التي لا تتصف بالدقة الكاملة، لكنها تتميز بسرعة الحصول عليها و قلة تكاليف الحصول عليها، لكونها مأخوذة بتحيز فإنه



تحتوي على الكثير من الأخطاء، و على الباحث أن يراعي ذلك عند محاولة تفسير و تعميم نتائجها.

- **العينة الحصصية**: و يتم إختيارها أيضا بتحيز قصد إظهار الخصائص ذات الأهمية للباحث الإحصائي، غير أنه ينبغي توافر الشروط التالية عند اللجوء لإستخدامها و ن ذلك ما يلي:

- أن تكون الخصائص الخاصة بالمجتمع و التي تؤثر على موضوع البحث متوافرة في العينة.
- أن تكون هذه الخصائص من الممكن إستخدامها في تقسيم المجتمع الى مجموعات متجانسة كالدخل أو السن أو الوظيفة...الخ.
- أن تكون هذه الخصائص مؤثرة تأثيرا ملحوظا على موضوع البحث.
- أن يكون عدد هذه الخصائص محدودا حتى لا توجد مجموعات كثيرة يصعب التعامل معها.

- **العينات العمدية**: وهي التي يتم اختيارها و هناك بعض الأهداف المحددة في ذهن الباحث الذي يقوم باختيار العينة، و هذه العينة لاتمثل المجتمع الإحصائي، لذا ينبغي عليه توخي الحذر في تفسيره لنتائج دراسة العينة.

- **العينات الحكمية**: و هي التي يقوم الباحث باختيارها بصورة تمثل المجتمع مع استخدامه لبعض المعايير الحكمية القائمة على خبرته الشخصية، و بالتالي فإن جودة هذه العينة تتوقف بدرجة كبيرة على خبرة الباحث الذي يقوم بعملية الإختيار.

و لاشك أن طرق العينات العشوائية تكون الأكثر مصداقية في مختلف الدراسات الإحصائية لكونها خالية من عنصر التحيز.



ج - طرق جمع البيانات الاحصائية: تجمع البيانات الاحصائية حسب طبيعة المجتمع الاحصائي، إما بالإتصال المباشر بوحدات المجتمع الإحصائي أو العينة الإحصائية، أو بالإتصال غير المباشر بهما، أو عن طريق الملاحظة أوالتسجيل الحيوي.

• **طريقة الإتصال المباشر:** في هذه الحالة يتطلب الأمر الإتصال بجميع وحدات المجتمع الإحصائي أو العينة، وذلك إما عن طريق **الباحث نفسه** وذلك عندما يكون حجم المجتمع الإحصائي صغيرا، بحيث يمكن للباحث أن يتحكم فيه من حيث جمع البيانات، ومن حيث التكاليف والوقت، وفي هذه الحالة تكون البيانات المحصل عليها في غاية الدقة نتيجة لإهتمام وحرص الباحث عليها لكونها تهمه مباشرة، و بالتالي تكون نتائج الدراسة التي يتوصل إليها صحيحة، و من **عيوب** هذه الطريقة أنها تستغرق وقتا طويلا. و قد يتم **إستخدام أعوان إحصائيين**، ويتم ذلك عندما يكون حجم المجتمع أو العينة كبيرا، بحيث يستحيل على الباحث أن يقوم وحده بذلك، غير أنه ينبغي إعداد الأعوان إعدادا جيدا، كما يجب أن يتصفوا باللباقة والدبلوماسية وكرم الأخلاق، وأن يتحلوا بالصبر والأدب و الأمانة في تدوين المعلومات، إضافة الى ضرورة إلمامهم بكل المعاني والمصطلحات والتعاريف التي تتضمنها الإستمارة الإحصائية، كما يجب أن يكونوا قادرين على التفسير والإقناع بما يمكن أن يوجه اليهم من أسئلة واستفسارات، و من مزايا هذه الطريقة أنها تسمح بتفسير الأسئلة وتوضيح كل ما يمكن أن يكون غامضا، كما تسمح بجمع المعلومات في أقصر وقت ممكن، ولها **عيوبا** كثيرة أهمها إرتفاع التكاليف و إحتمال الوقوع في أخطاء كثيرة، إضافة الى

إحتمال التأثير السلبي للأعوان إذا لم يتحلوا بالصفات المشار إليها، مما يدفع المبحوثين للإدلاء بمعلومات غير صحيحة، كما أن هذه الطريقة غير صالحة إذا ما كانت الأسئلة تتعلق بأمور شخصية بحتة، كالأمور العائلية أو السياسية أو المذهبية.

* **طريقة الإتصال غير المباشر**: في هذه الطريقة يتم جمع البيانات الإحصائية دون أن يتصل الباحث أو الأعوان مباشرة بوحدات المجتمع الإحصائي أو العينة، و ذلك إما عن طريق المراسلة أو الهاتف أو الأنترنات أو وسائل الإعلام، و تستخدم في المجتمعات التي تتميز بالوعي الإحصائي.

** **طريقة المراسلة** : في هذه الطريقة يقوم الباحث بارسال إستمارات الى عناصر المجتمع الاحصائي أو العينة، التي يجري العمل الاحصائي عليها، حيث يُطلب ملأها و إعادتها الى الباحث، عن طريق المراسلة أيضا، ولهذه الطريقة عدة **مزايا** أهمها قلة التكاليف، و إقتصاد الوقت، ومن **عيوبها** عدم الدقة في الإجابات ولامبالاة بعض المبحوثين بها.

** **المخاطبة الهاتفية** :تصلح هذه الطريقة في الدراسات المحدودة والتي يضمن فيها الباحث وجود أجهزة هاتفية لدى المبحوثين، ومن مزاياها أنها توفر الوقت بحيث تسمح للباحث الحصول على المعلومات التي يرغب في الحصول عليها بسرعة فائقة بعيدا عن سوء فهم الأسئلة، كما أن المعلومات المحصل عليها تكون دقيقة إضافة الى انخفاض تكاليف العملية.

** **عن طريق وسائل الاعلام** : ويتم ذلك بطرح أسئلة محددة، عبر وسائل الاعلام كالصحف، الإذاعات، والتلفزيون، الإنترنات، بحيث تتم الإجابة عنها إما عن طريق الهاتف مباشرة، أو عن طريق المراسلة، ومن مزاياها أنها قليلة التكاليف



و يمكن أن تصل جميع عناصر المجتمع الإحصائي، وأهم عيوبها إمكانية لامبالاة المبحوثين بها.

• **طريقة الملاحظة و الرصد:** بعض الدراسات أو البحوث تتطلب إتباع رصد الظاهرة عن طريق ملاحظتها وتسجيل قياساتها وتحرك متغيراتها، ويتم ذلك خاصة في البحوث البيولوجية و الدراسات المعملية، و في بعض الدراسات الإجتماعية، حيث يقوم الباحث برصد الحركة والوقت والتعرف على محددات الظاهرة، كأن يقوم برصد حركة المرور عندما تكون الدراسة تتعلق بذلك، عند فترات زمنية محددة، ليتم إستنتاج الأوقات التي يكثر فيها الإزدحام والأوقات التي يخف فيها ذلك.

• **طريقة التسجيل الحيوي** : تستخدم هذه الطريقة خاصة في الدراسات الديموغرافية، حيث يتم إعداد مكاتب خاصة، يتم التسجيل فيها مباشرة، أين يتقدم الأشخاص الى هذه المكاتب، و يتم تسجيل كل ما يطرأ على حالاتهم، من مواليد أو وفيات أو أمراض... الخ، وهذه الطريقة تكون منظمة في الغالب من طرف هيئات رسمية، و تلزم العقوبات في حالة عدم التقيد بها أو تفقد الإمتياز الذي قد تجرى لأجله. من أهم مزاياها أنها تضمن درجة عالية من الدقة في المعلومات، كما توفر المعلومات بسرعة وفي الوقت الذي يريده الباحث.

هذه أهم الطرق التي يمكن أن تستخدم في جمع البيانات الإحصائية، وكما يمكن إستخدام كل طريقة بإستقلال تام عن الأخرى، فإنه يمكن أيضا أن يتم إستخدام طريقتين أو أكثر في آن واحد لجمع البيانات الإحصائية.

د - الاستمارة الاحصائية : وهي الوثيقة التي يجري من خلالها الحصول على المعلومات الاحصائية من المبحوثين

(أي عناصر المجتمع الإحصائي)، وهي من الأدوات الجوهرية في إنجاح العملية الاحصائية، ولكي تتم عملية جمع البيانات بسهولة و بأقل ما يمكن من الأخطاء وبأسرع وقت ممكن، يجب أن تتصف الإستمارة بما يلي:

• **من حيث الشكل:** يجب أن تكون ورقة الاستمارة من النوع الجيد الذي يتحمل الإستخدام الكثير، والذى يكون وقع القلم عليه جيدا، كما أن لون الإستمارة يجب أن يكون مقبولا ويفضل في ذلك اللون الأبيض كما يستحسن تلوين بعض مناطق الاستمارة أو تأطيرها بغية التحسيس على أهمية الأسئلة التي تتضمنها، كما يجب أن يكون حجم الاستمارة مناسبا، وأن لايكثر من عدد الصفحات، حتى لا يؤثر ذلك على القائم بعملية الإحصاء وعلى المستوجب، اذا كان تسجيل الإجابات ذاتيا. ومن الضروزي أن تكون الأسئلة داخل الاستمارة مرتبة ترتيبا منطقيا، ومرقمة حسب الترتيب. وأخيرا من الضروري ترك مسافات كافية للإجابة أمام أو تحت كل سؤال.

• **من حيث المضمون** : ونقصد بذلك كيفية صياغة الأسئلة، وفي هذا الإطار يوصي بما يلي:

- أن تكون الأسئلة مختصرة قدر الإمكان و أن تتطلب إجابات قصيرة، وأن لا تطرح إلا الأسئلة الضرورية للدراسة الإحصائية.

- يجب ان تكون الأسئلة بسيطية ولا تتطلب إجراء بعض العمليات الحسابية، و أن تكون باللغة التي يفهمها معظم عناصر المجتمع الاحصائي.

- يجب ان تتحاشى الأسئلة الشخصية والعاطفية والأسئلة المحرجة بصفة عامة.

- أن تحدد وحدات قياس الأسئلة المتعلقة بالكميات.

- أن يشار الى المختصرات على الهامش.

و أخيرا من البديهي أن تحتوي الاستمارة في أعلاها، على مصدرها، ورقمها ونوع البحث الاحصائي وعنوانه والإشارة الى ضمان سرية المعلومات المحصل عليها من المبحوثين وعدم رسميتها والاستدلال بها في المتابعات القضائية أو الادارية التي قد يتخوف منها المستجوب.

هـ - أخطاء جمع البيانات الإحصائية : يمكن أن ترتكب عدة أنواع من الأخطاء عند عملية جمع البيانات، نورد منها مايلي :

* **أخطاء المبحوثين**: وتكون إما متعمدة، ناتجة عن الخوف من المسئوليات التي قد تترتب على الإجابات الصحيحة، كالخوف من فرض الضرائب أو المتابعة القضائية... الخ، أو الخوف من بعض الأوهام المنتشرة في المجتمع الإحصائي كالعين والحسد والطمع، أو تكون ناتجة عن عدم الوعي الإحصائي أو نتيجة لشخصية المستجوب التي قد تكون مهابة أو هزلية.

وقد تكون هذه الأخطاء غير متعمدة ناتجة عن عدم فهم السؤال أوالاسئلة المطروحة كأن يطرح السؤال بلغة غير مفهومة، أو عدم سماع السؤال جيدا، و قد تكون ناتجة عن سوء تصميم الاستمارة، أو عدم ملاءمة وقت الإستقصاء.

* **أخطاء الباحثين** : وهي الأخطاء التي يرتكبها المستجوب عند تسجيله الإجابات، كأن يخطيء في تسجيل بعض الإجابات، أو يسجل إجابة في محل إجابة أخرى، أوان ينسى طرح بعض الأسئلة... الخ.

و- مراجعة البيانات : على الرغم من الإحتياطات المتخذة سواء على مستوى المستجوبين أو على مستوى

شكليات الإستمارة فإنه يمكن أن ترتكب أخطاء عند جمع البيانات الإحصائية، لذلك فإنه يتم مراجعة الإستمارات بعد الإنتهاء من جمع البيانات الإحصائية. وقبل الشروع في تبويب البيانات ينبغي القيام بما يصطلح عليه **تدقيق أومراجعة** الإستمارات و ذلك بهدف :

- التأكد من دقة المعلومات المحصل عليها.
- التأكد من عدم تناقض البيانات المسجلة في الإستمارات مع واقع الظاهرة.
- التأكد من تسجيل البيانات حسب المواصفات المقدمة للباحث.
- التأكد من الحصول على جميع البيانات المطلوبة.
- النظر في الملاحظات التي يكون الباحث قد دونها على هامش الإستمارة أو في المكان المخصص لذلك.

و نشير الى أنه في الدراسات الإحصائية الضخمة ينبغي مراجعة الإستمارات ميدانيا قبل تسليمها، وذلك بإعادة قراءة ما كتب على المستجوب نفسه، إضافة الى ذلك فإنه ينبغي على المسئول على قاعات الفرز عند تسليم الإستمارات التأكد من وجود إجابة على كل إستمارة وأن الإجابات مكتوبة بخط واضح وأنها مسجلة في الأماكن المخصصة لها، إضافة الى وجود إمضاء العداد و تاريخ إجراء التسجيل و عدد الإستمارات المسلمة، وينبغي أن يجري ذلك في القاعات المعدة خصيصا عشية إجراء العملية.

بعد مراجعة الإستمارة يتم إتخاذ القرار إما بقبولها و إعتمادها في العملية الإحصائية أو رفضها إذا كانت تحتوي على أخطاء لا يمكن تصحيحها ويكون لها تأثير سلبي على نتائج العملية. أما إذا كان بالإمكان تصحيحها فإنه يتم ذلك دون اللجوء الى التشطيب أو مسح البيانات الخاطئة، و ينبغي لأجل

ذلك إستخدام قلم من لون مغاير، ويستحسن في ذلك اللون الأحمر لكونه ملفتا للإنتباه وبإعتباره اللون المستخدم تقليديا في التصحيح أو إبداء الملاحظات، كما ينبغي تدوين الملاحظات المتعلقة بالمراجعة و التصحيح، وذلك ليتمكن المراجع الموالي من إدراك ذلك في حالة وجود أكثر من مراجع واحد.

3 - **المرحلة الثالثة: تبويب وعرض البيانات** : بعد جمع البيانات الإحصائية في الاستمارات (قد يكون عددها كبير جدا) فإن أكوام الاستمارات تلك، لا يمكن بأي حال من الأحوال أن تعطينا نظرة وافية عن نتيجة العملية، لذلك لابد من اللجوء الى تصنيف وتبويب تلك البيانات، اي ان نجعلها في مجموعات متجانسة، تشترك في صفة أوخاصية واحدة أوعدة خواص، أي ان نجعلها في شكل فئات إحصائية، مقدمة في جداول مناسبة (انظر الفصل الموالي) ولتصنيف وتبويب البيانات فنيات خاصة، يلجأ اليها الإحصائي، حتى تصبح المعلومات عملية، ويمكن استخدامها من طرف الباحث نفسه، أو من طرف غيره، بعد تقديمها في نشريات خاصة أو دوريات عامة، وتصنيف وتبويب البيانات يجري حسب طبيعة البيانات ذاتها، وهو الشيء الذي سنبرزه من خلال الفصل الموالي.

4 - **المرحلة الرابعة: تحليل البيانات واستقراء النتائج** : تحليل البيانات هو وسيلة الحصول على الإجابات المطلوبة في إشكالية البحث الإحصائي، اذ تعتبر المراحل المشار اليها آنفا ضرورية، حتى يتمكن الباحث من التحليل الإحصائي لجوانب الظاهرة المدروسة، ويتم ذلك عن طريق أدوات إحصائية كثيرة، منها البسيط ومنها المعقد، تسمح باستقراء النتائج واستخلاص مدلولها، الذي هو هدف البحث الإحصائي، وسنستعرض بعضها إبتداء من الفصل الرابع.



إن الحرص على اتباع خطوات المراحل الأربعة المشار اليها يجنب الباحث الكثير من المتاعب و المشاق التي يمكن أن يصادفها عمليا فيما لو لم يتقيد بها، إضافة الى تبذير الكثير من الأموال و الوقت دون فائدة، لأنه دون أدنى شك سوف يحصل على معلومات خاطئة قد تفيد الباحث فقط في جزء من الدراسة الإحصائية وقد لاتفيده بتاتا، والأخطر من ذلك أن نتائج الدراسة المتوصل إليها تكون خاطئة ما دامت المعلومات الأولية المحصل عليها خاطئة، الشيء الذي ينجر عنه قرارات خاطئة قد تعود بالسلب على الظاهرة المدروسة.

أسئلة و تمارين.

تمرين 1: اعط تعـــاريف للمصطلحـــات التاليـــة:

1- تعـــداد.	5- صفة نوعيـــة.
2- إحصائيـــات.	6- وحدة إحصائيـــة.
3- علم الإحصـــاء.	7- مجتمع إحصـــائي.
4- بحث إحصـــائي.	8- عينة إحصائيـــة.

تمرين 2 : وضح لماذا نضفـــي صفـــة العلميـــة علـــى الإحصـــاء ؟.

تمرين 3: ماهي المواضيع التي يتناولها الإحصاء الوصفي ؟. حدد الفرق بـــين الإحصاء الوصفي والإحصاء الرياضي.

تمريـــن 4: في دراســـة شـــاملة حـــول ظـــروف الطـــالب الجـــامعي، حدد الصفات النوعية والصفـــات الكميـــة المســـتقصى عنـــها.

تمريـــن 5: مـــا هـــي أهـــم المؤسســـات الوطنيـــة الـــتي تقـــوم بجمـــع البيانـــات الإحصائيـــة عـــن الظواهـــــر الإقتصاديـــــة والإجتماعيـــــة ودراســـتها ؟.

تمرين 6: هـــل توجـــد مصلحـــة خاصـــة بالإحصائيـــات في المؤسســـة التي تنتمي اليـــها ؟ حـــدد أهـــم الأدوار و الأعمـــال الـــتي تقـــوم بهـــا أو قامت بهـــا.

تمريـــن 7: حـــدد مجـــالات إســـتخدام الإحصـــاء في الحيـــاة اليوميـــة، ووضح علاقـــة الإحصـــاء بـــــ : ا- العلـــوم الإقتصاديـــة. ب- العلـــوم الطبية. ج- العلوم السياسية، مـــع إعطـــاء أمثلـــة كافيـــة.

تمريـــن 8: وضـــح لمـــاذا يلجـــأ الى إســـتخدام أسلوب العينـــات في بعض الدراســـات الإحصائيـــة؟.

تمرين 9: قم بـــإعداد إســـتمارة إحصائيـــة، لحصـــر النفقـــات اليوميـــة لطلبة الفرع الذي تنتمـــي اليـــه.



تمرين10: وضح كيف يتم إختيار كل من: العينة الطبقية، العينة المنتظمة، العينة العنقودية.

تمرين11: وضح كيف يتم إختيار عينة عشوائية تتكون من 95 عنصر من ضمن مجتمع إحصائي يتكون من 900 عنصر.

تمرين 12: قم بإعداد مخطط عمل شامل ومفصل، لإجراء دراسة إحصائية حول مستوى التغذية لسكان الولاية التي تقطن بها، وقدر تكلفة إنجاز المخطط بالأسعار الجارية.

تمرين 13: حدد أهم أخطاء جمع البيانات الإحصائية التي يمكن الوقوع فيها، عند إجراء البحث الإحصائي المطلوب في التمرين 12، وبين كيف يجب تفاديها.

تمرين 14 : ما هي الطرق والأساليب التي ينبغي إستخدامها في جمع البيانات الإحصائية حول المواضيع التالية :

- دراسة الحالة الإجتماعية لطلبة المعهد الذي تنتمي اليه.
- دراسة الإستهلاك الغذائي في الولاية التي تسكن فيها.
- دراسة مدى الإستجابة لدعوة تلقيح الأطفال ضد مرض معين.
- دراسة أعمار الأشخاص المستفيدين من إعانات إجتماعية تقدمها البلدية التي تسكن فيها.
- إجراء دراسة إحصائية عامة حول السكان والسكن في دولة



الفصل الثاني

تبويب البيانات الإحصائية.

كما سبقت الإشارة في منهجية البحث الإحصائي، فإن عملية تبويب البيانات الإحصائية، من الأعمال الضرورية التي لابد منها حتى تصبح البيانات عملية، يمكن إستخدام أدوات التحليل الإحصائي لتفسيرها واستخلاص النتائج منها، ويتم تبويب البيانات عن طريق الجداول الإحصائية، إما يدويا أو آليا. وسنستعرض في هذا الفصل طريقة تبويب البيانات إضافة الى التعرض الى مختلف جوانب جداول التوزيعات التكرارية.

أولا: مواصفات الجداول الإحصائية: إن تصنيف وتبويب البيانات الإحصائية يهدف الى وضع تلك البيانات في شكل مبسط، بحيث يمكن للباحث دراستها وتحليلها وإستخلاص النتائج بكل سهولة، ويتم ذلك في جداول خاصة، تسمى **بالجداول الإحصائية**.

إن كل جدول إحصائي يتطلب مجموعة من المواصفات منها ما يلي:

- يجب أن يكون الجدول مصمما بشكل مقبول، ويحمل كل عناصر الظاهرة المدروسة.

- يجب أن تكتب الأرقام بانتظام، بحيث توضع الآحاد تحت الآحاد والعشرات تحت العشرات و المئات تحت المئات...الخ، كما يجب أن يشار الى الأرقام غير المتوفرة أو غير الرسمية... بإشارات خاصة متعارف عليها منها ما يلي:

.... تعني أرقام غير متوفرة.

ــــ تعني أرقام غير موجودة أصلا.

× أرقام غير رسمية.

[ ] أرقام غير محسوبة ضمن المجموع.



– أن يكون للجدول عنوانا مختصرا قدر الإمكان، ومتضمنا لمحتوى الجدول.
– أن يحدد تحت العنوان أو ضمنه مكان الظاهرة وزمان حصرها.
– أن يشار الى وحدات قياس الظاهرة المدروسة، سواء في خانات الجدول أوعلى الهامش، أو تحت العنوان اذا كانت هناك وحدة قياس واحدة مشتركة لجميع عناصر الجدول.
– أن تحدد المختصرات التي قد تستخدم على هامش الجدول.
– في حالة استخدام أكثر من جدول لابد من ترقيم كل جدول ترقيما متتاليا حسب الترتيب، كما تجب الإشارة الى مصدر الأرقام.

و يتم تقديم البيانات في غالب الأحيان بشكل تكراري، ويسمى عرض البيانات بهذه الطريقة **بالتوزيع التكراري**، كما تسمى الجداول التي تعرض عن طريقها **بالجداول التكرارية**.
والجداول التكرارية على أنواع، حسب طبيعة البيانات الإحصائية، منها الكمية و النوعية، البسيطة و المزدوجة، ومنها المتصلة وغير المتصلة، وذات الصفات البسيطة والمزدوجة، وسوف نستعرض في هذا البند كيفية افراغ المعلومات الأولية في جداول إحصائية بالطريقة اليدوية كما نستعرض كذلك، الأنواع المختلفة للتوزيعات التكرارية ذات الإستخدام الواسع.
وقبل ذلك لابأس أن نذكر بعناصر الوحدة الإحصائية التي قد تكون ذات صفات نوعية أو كمية و التي على أساسها يتم التصنيف، و تسمى هذه الصفات **بالمتغيرات**، ففي المتغيرات الكمية يمكن أن نصادف حالتين، هما:
– **المتغيرات المتقطعة** : وفي هذه الحالة تأخذ المتغيرة رقما واحدا محددا كأن نقول : عدد العائلات الذين لديهم 4 أطفال في حي ما هو 10، فعدد الأطفال هنا محدد في رقم واحد فقط وليس في مجال.



- **المتغيرات المستمرة** : وفي هذه الحالة تأخذ الصفة الكمية أية قيمة ضمن مجال محدد، وذلك كالعمر مثلا، كأن نقول عدد الأطفال الذين تتراوح أعمارهم بين 8 و 10 سنوات في قسم دراسي ما هو: 8 فالمتغيرة هنا يمكن أن تأخذ أية قيمة ضمن هذا المجال مهما كانت بفواصلها، و بمعنى آخر أنها غير متقطعة أو مستمرة ضمنه.

ثانيا- الجداول التكرارية ذات الصفات النوعية : و هي الجداول التي تتضمن تكرارات صفات نوعية معينة للظاهرة المدروسة، كعدد المتزوجين، أوعدد حاملي شهادة الليسانس في تخصص ما، أو عدد العاطلين عن العمل، مثلا، وقد تكون إما جداول تكرارية بسيطة أو جداول تكرارية مزدوجة (مركبة).

1- الجداول التكرارية البسيطة: و هي تحتوي على صفة نوعية واحدة فقط، ويتم افراغ البيانات فيها كما يلي :

- يرسم جدول مسودة يناسب حجم البيانات مقسم الى ثلاثة أعمدة.
- يوضع في العمود الأول الصفة، وفي الثاني وهو أكبر نسبيا التعداد، وفي العمود الثالث التكرار.
- يملأ الجدول حسب منهجية المثال التالي :

مثال2-1: أخذت عينة عشوائية من الطلبة تتكون من 25 طالبا، ليتم إستقصاءهم عن شعب البكالوريا التي يحملونها، و تم ذلك من خلال ملأ استمارات خاصة، فكانت الاجابات في الإستمارات كما يلي :

أداب	أداب	علوم	أداب	رياضيات
أداب	علوم	علوم	رياضيات	علوم
علوم	رياضيات	علوم	علوم	رياضيات
علوم	علوم	رياضيات	رياضيات	أداب
علوم	رياضيات	علوم	أداب	علوم



المطلوب : أفرغ هـــذه البيانـــات في جـــدول مناســـب.

نقـــوم بـــإعداد جـــدول حســـب الشـــكل أدنـــاه (جـــدول 2-1)، وحتى نتجنـــب الخطـــأ خاصـــة إذا كـــان عـــدد الإســـتمارات أو عـــدد البيانـــات كبـــيرا، نقـــوم بـــأخذ اســـتمارة بعـــد إســـتمارة، ونضـــع تشـــطيبة عموديـــة صغـــيرة أمـــام الصفـــة الـــتي تحتويـــها الاســـتمارة، وذلـــك في عمـــود التعـــداد، و عندمـــا نصـــل الى التشـــطيبة الخامســـة نضعها مقاطعـــة للأربعـــة الأولى، بحيـــث تشـــكل لنـــا زمـــرة تتكـــون من خمـــس تشـــطيبات، ونســـتمر هكـــذا حـــتى ننتـــهي مـــن تسـجيل كل الإســـتمارات.

ومـــن البديـــهي أن اســـتخدام الزمـــر الخماســـية علـــى هـــذا المنـــوال، يسهل لنا عملية الجمع عنـــد الانتـــهاء مـــن إفـــراغ البيانـــات في عمـــود التعداد، وذلك ما يوضحـــه الجـــدول المـــوالي :

الفرع	التعداد	التكرار
أداب	IIII I	6
علوم	IIII IIII II	12
رياضيات	IIII II	7
المجموع		25

جدول2-1

يعتـــبر الجـــدول 2-1 جـــدولا أوليـــا، أي **جـــدول مســـودة**، ويســـمى **بجدول التفريـــغ**، وهـــو يســـاعد علـــى الإحصـــاء الدقيـــق، و يلاحـــظ أن الزمـــر الخماســـية في عمـــود التعـــداد تســـهل لنـــا الحســـاب في النهايـــة، ويتـــم حـــذف العمـــود الثـــاني، للحصـــول علـــى الجـــدول النهائي المطلوب، وذلك مـــا يظـــهرة الجـــدول 2-2 أدنـــاه.



توزيع عينة من الطلبة حسب فرع الدراسة.

الفرع	التكرار
أداب	6
علوم	12
رياضيات	7
المجموع	**25**

جدول2-2

2- الجداول التكرارية المزدوجة للصفات النوعية:

وهي التي يتم التصنيف فيها على أساس صفتين نوعيتين في الوحدة الإحصائية، ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال2-2: لمعرفة مدى تتبع طلبة الثانويات لنشرات الأخبار المتلفزة حسب الجنس، أختيرت عينة عشوائية من إحدى الثانويات تتكون من 10 طلبة، فكانت الإجابات في الإستمارات المعدة خصيصا لذلك كما يلي :

الرقم	الجنس	الرد
1	ذ	نعم
2	ذ	نعم
3	ذ	نعم
4	ث	لا
5	ذ	لا

الرقم	الجنس	الرد
6	ث	نعم
7	ث	لا
8	ذ	نعم
9	ذ	لا
10	ذ	نعم

ملاحظة : ذ : ذكر. ث : أنثى. نعم : يشاهد أو تشاهد. لا : لايشاهد أو لاتشاهد.

المطلوب : افرغ البيانات أعلاه في جدول مناسب.

لإنجاز ذلك نقوم بإعداد جدول كما هو واضح أدناه، ونتبع الأسلوب المشار اليه سابقا في عملية التبويب، أي استخدام التشطيب العمودي، فنحصل على الجدول المسودة التالي :



الرد / الجنس	لايشاهد أو لاتشاهد		يشاهد أو تشـاهد		المجمـوع
	تعداد	تكرار	تعداد	تكرار	
ذكـور	II	2	IIIII	5	7
إنـاث	II	2	I	1	3
المجمـوع		**4**		**6**	**10**

جدول2-3

وباستبعاد التشطيبات العمودية، نحصل على الجدول المزدوج التالي:

جدول يظهر مدى مشـاهدة عينـة مـن الطلبـة للأخبـار المتلفـزة حسـب الجنـس.

الجنس الرد	لايشاهد أولاتشاهد	يشاهد أوتشاهد	المجموع
ذكور	2	5	7
إناث	2	1	3
المجموع	**4**	**6**	**10**

جدول 2-4

يلاحـظ إذن أن هـذا الجـدول، هـو جـدول تكـراري مـزدوج ذي صفات نوعية، أي مبـني علـى أسـاس أكـثر مـن خاصيـة(صفـة) واحدة، اذ أن الصفـة النوعيـة الأولى هـي الجنـس، والصفـة النوعيـة الثانية هي مدى المشاهدة، وهـو يعـرض تلـك البيانـات الـتي كـانت في الإسـتمارات في شـكل فوضـوي، ويلخصـها بوضـوح تـام، وهذا هو الهدف الأساسي مـن تبويـب البيانـات.

و ما تجدر الإشـارة إليـه هـو أنـه عنـد إعـداد الجـداول التكراريـة ذات الصفات النوعية، فإنـه يجـب ترتيـب صفـات الظـاهرة حسـب أهميتـها.

ثالثـا: الجـداول التكراريـة ذات الصفـات الكميـة : وهـي الجداول الـتي يكـون فيـها التصنيـف علـى أسـاس صفـة كميـة في الظـاهرة، وبمعـنى آخـر هـي الـتي تعـرض تكـرارات كميـات



الظواهر، كتوزيع العمال حسب الأجور المدفوعة لهم، أو حسب أعمارهم، وقد تكون هذه الجداول إما مستمرة (متصلة) أو غير مستمرة (منفصلة)، وفي كلتا الحالتين فإنه عند إفراغ البيانات الأولية في هذه الجداول، لابد من مراعات ترتيب القيم إما تصاعديا أوتنازليا، كما لابد من إستخدام قاعدة العد الأساسية، وهي التشطيبات العمودية، وذلك لتفادي الأخطاء خاصة إذا ما كان عدد القيم كبيرا.

1- الجداول التكرارية غير المستمرة : وهي الجداول التي تظهر عدد تكرارات كمية واحدة محددة وممثلة في **رقم واحد فقط**، تسمى هذه الكمية **بالفئة**، وبمعنى آخر هي التي تكون فيها الصفة الكمية عبارة عن متغيرة متقطعة كما هي معرفة آنفا.(أنظر المتغيرات المتقطعة).

مثال2-3: البيانات التالية تعرض توزيع عمال مؤسسة ما، حسب عدد الأيام التي إشتغلوها في شهر جانفي.

عدد الأيام (الفئة)	عدد العمال (التكرار)
10	5
15	6
18	4
20	3
22	2
المجموع	**20**

جدول2-5

هذه البيانات معروضة في جدول تكراري غير مستمر، حيث أن كل مجموعة من العمال إشتغلت عددا محددا في رقم واحد من الأيام، فعلى سبيل المثال عدد العمال الذين اشتغلوا 10 أيام تماما هو 5، وعدد العمال الذين إشتغلوا 20 يوما بالتمام هو 3، وهكذا. عدد الأيام يسمى بالفئة، وهو محدد في رقم واحد كما سبقت الإشارة، أي هو غير محصور ضمن مجال، و بالتالي

نقول أن طول الفئة (طول مجال الفئة)، معدوم، ونشير لذلك إبتداء من الآن بـ: L=0.

وتسمى مثل هذه الجداول **بالجداول الكمية البسيطة غير المستمرة**، وهناك أيضا **الجداول الكمية المزدوجة غير المستمرة**، وهي المؤسسة بناء على كميتين في الظاهرة.

و ما تجدر الإشارة اليه، هو أنه عند القيام بعملية التبويب اليدوي للبيانات في مثل هذه الجداول، فإننا نتبع نفس الطريقة التي اتبعت في حالة تبويب البيانات ذات الصفت النوعية.

مثال2-4: قامت مديرية الدراسات بأحد المعاهد بجمع بيانات عن عدد أفراد الأسرة لعينة من الطلبة تتكون من 20 طالبا، من خلال إستمارات أعدت لهذا الغرض، فكانت النتائج الظاهرة في الإستمارات كما يلي :

6	7	3	2	10	2	8	6	6	5
7	5	9	7	6	3	4	10	7	7

المطلوب : تبويب هذه البيانات في جدول تكراري.

للقيام بما هو مطلوب، نقوم بإعداد جدول ثم نملأه، كما هو واضح أدناه:

عدد افراد الأسرة (الفئة)	التعداد	عدد الطلبة (التكرار)
2	II	2
3	II	2
4	I	1
5	II	2
6	IIII	4
7	~~IIII~~	5
8	I	1
9	I	1
10	II	2
المجموع		20

جدول2-6

باستبعاد عمود التعداد يصبح الجدول المطلوب كما يلي :



توزيع عينة من الطلبة حسب عدد أفراد الأسرة.

عدد افراد الأسرة (الفئة)	عدد الطلبة (التكرار)
2	2
3	2
4	1
5	2
6	4
7	5
8	1
9	1
10	2
المجموع	20

جدول2-7

الجدول المحصل عليه هو أيضا جدول تكراري كمي بسيط غير مستمر، أومنفصل، وذلك لإنفصال الفئات بعضها عن بعض، وعدم ارتباطها، فكل فئة مستقلة تماما عن الفئة التي تليها، وهي عبارة عن رقم واحد محدد تماما.

يرمز لقيمة الفئة بـ: x_I و لتكراراتها بـ: f_i، حيث i : رقم الفئة.

2- الجداول التكرارية الكمية المستمرة (المتصلة):

وهي الجداول التي تكون فيها الظاهرة محصورة في مجال، بحيث يمكن أن تأخذ أية قيمة ضمنه، كأن نقول مثلا أن عدد الأطفال الذين تتراوح أطوالهم بين 100 سم و 120 سم في قسم دراسي ما هو 10 أطفال، فالظاهرة في هذا المثال وهي أطوال الأطفال يمكن أن تأخذ أية قيمة ضمن المجال 100 و 120 سم، و بمعنى آخر هي الجداول التي تكون فيها **الصفة الكمية** عبارة عن **متغيرة مستمرة** كما هي معرفة سابقا، و يتم إستخدام هذه الطريقة في عرض البيانات إذا كان عددها كبيرا، وذلك لتقليصها، إذ أن هدف التبويب هو عرض البيانات بأقل حيز ممكن وبأقصى وضوح، فيتم حينئذ تحديد فئات طولها أكبر من الصفر، ويتم إهمال القيم التي تقع داخل مجال الفئات.



يسمى طول مجال الفئة **بمدى الفئة أو طول الفئة**، ونرمز له بالحرف L

مثال2-5: البيانات التالية خاصة بالنفقات اليومية لعينة من الطلبة بالدينار، والمطلوب تبويبها في جدول تكراري بجعل طول الفئة : L = 4 دينار.

13	8	5	17	20	7	6	15	4
11	23	15	12	5	25	9	7	4
22	9	9	22	18	7	8	17	6
4	21	16	20	19	12	7	8	4

لتبويب هذه البيانات نقوم بتصميم جدول تكراري، ثم نحدد أدنى قيمة ضمن مجموعة البيانات لتكون الحد الأدنى لأول فئة، وهي في مثالنا 4، وبما أن طول الفئات المطلوب أن نبوب على أساسه البيانات هو : L=4، لذلك فإن الحد الأعلى للفئة الأولى هو 8، ويكون الحد الأعلى للفئة الأولى هو الحد الأدنى للفئة الثانية، وهكذا، نحصل على الفئات كما هي واضحة في الجدول 2-8 أدناه، ثم نعيد نفس مبدأ العد المشار اليه آنفا، وهو إستخدام التشطيبات العمودية، وذلك لتفادي الأخطاء، خاصة عندما يكون عدد البيانات كبيرا جدا، و يكون الجدول الموالي هو الجدول المطلوب رقم 2-8.

توزيع عينة من الطلبة حسب النفقات اليومية بالدينار.

رقم الفئة	الفئة	التكرار
1	8-4	12
2	12-8	7
3	16-12	5
4	20-16	5
5	24-20	6
6	28-24	1
مج		**36**

جدول2-8

الفئة الأولى (4-8) مثلا، تعني الطلبة الذين ينفقون من 4 الى أقل من 8 دينار، عددهم 12 طالبا، فالعبارة (-)، تعني الى أقل

من. يسمى الطرف الأول للفئة **بالحد الأدنى للفئة، أما طرفها الثاني فيسمى بالحد الأعلى للفئة**، ومن الواضح في الجدول 2-8 أن طول الفئات متساو، ويساوي في كل فئة 4، و طول الفئة عبارة عن الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى، أي:

$$L_i = T_{i+1} - T_i \qquad 1-2$$

حيث : L_i: طول الفئة i. T_{i+1} :الحد الأعلى للفئة i. T_i: الحد الأدنى للفئة i.

من الواضح أن التوزيع المحصل عليه في الجدول 2-8، لايتضمن جميع قيم المعلومات الأولية كما وردت أصلا، لكنها متضمنة داخل الفئات، وتم إهمالها، لأجل حصر البيانات و تقديمها في صورة أكثر تلخيصا.

عند تصميم أي جدول تكراري مستمر، تكون مشكلة الباحث الإحصائي هي، إختيار طول الفئة المناسب لعرض البيانات، وكذلك تحديد عدد الفئات المناسب لذلك، ويتم تحديد ذلك في غالب الأحيان، بصورة تضمن عدم فقدان البيانات لأهميتها في التحليل الإحصائي، وبالتالي يعتمد ذلك على ذاتية الإحصائي، أي الى مدى مهارته وفنيته في التعامل مع البيانات، غير أن هناك قاعدة عامة، يتم بموجبها تحديد طول الفئة المناسب، لتبويب البيانات في جداول تكرارية مستمرة، تضمن عدم فقدان البيانات لأهميتها في التحليل الإحصائي وهي كما يلي :

* **تحديد طول الفئة**: إن تحديد طول الفئة يساعد على تحديد عدد الفئات وبالتالي حجم الجدول، إذ كلما كان طول الفئة كبيرا كلما كان حجم الجدول صغيرا، والعكس صحيح، و لتحديد طول الفئة يتم إستخدام قاعدة ستيرجس (H.A.Sturges)، التي تعطى كما يلي :



$$L = \frac{W}{1 + 3.322 \, LogN} \quad 2-2$$

حيث :L : طول الفئة. N : عدد القيم. W : المدى، وهو الفرق بين أكبر قيمة ضمن مجموعة القيم، وأصغر قيمة ضمنها أي :

$$W = X_{Max} - X_{Min} \quad 3-2$$

حيث : X_{Max} : أعظم (أكبر) قيمة ضمن مجموعة القيم.
X_{Min}: أدنى (أصغر) قيمة ضمن مجموعة القيم.

وكما سبقت الإشارة فإن هذه القاعدة تعطينا طول الفئات المناسب لإفراغ مجموعة البيانات في جدول تكراري مستمر، غير أن الإلتزام بها ليس إجباريا، بل يبقى تحديد طول الفئة أمرا فنيا، يعود للإحصائي القائم بالعملية.

- **تحديد عدد الفئات** : يحدد عدد الفئات بإستخدام القاعدة التالية :

$$Nc = \frac{W}{L} \quad 4-2$$

حيث Nc : عدد الفئات.

و من المعادلة 2-2 يمكن أن نكتب :

$$W = L(1 + 3.322 \, Log \, N) \quad 5-2$$

بتعويض 2-5 في 2-4، نجد أنه يمكن كتابة 2-4 أيضا على النحو التالي:

$$Nc = 1 + 3.322 \, Log \, N \quad 6-2$$

مثال2-6: أوجد طول الفئات المناسب لإفراغ البيانات التالية في جدول تكراري مستمر، ثم بوبها في جدول تكراري مستمر حسب طول الفئات المحصل عليه.

24	27	32	44	33	16	20	32	34	25
60	57	45	55	60	32	56	54	34	27
53	44	28	33	57	56	25	54	44	23
34	53	64	62	61	41	51	32	43	36
43	43	62	47	41	37	52	54	42	55



الإجابة : أكبر قيمة في مجموعة البيانات هي : 64، بينما أصغر قيمة هي:16، و عدد القيم هو : 50، و عليه فبتطبيق المعادلة 2- 2 نجد:

$$L = \frac{64-16}{1+3.322\,\text{Log}\,50} \cong 7$$

إذن طول الفئات المناسب لإفراغ هذه البيانات في جدول تكراري مستمر هو: 7.

أما لإيجاد عدد الفئات المناسب فيتم استخدام إما المعادلة 2-4 أو 2-6، وكلتاهما، تعطيا تقريبا نفس النتيجة و هي 7، وبالتالي يكون الجدول المطلوب هو:

f_i	الفئة	i
2	23-16	1
7	30-23	2
10	37-30	3
7	44-37	4
5	51-44	5
13	58-51	6
6	65-58	7
50		مج

جدول 2-9

كما سبقت الإشارة فإنه بالرغم من هذه القواعد لحساب كل من طول الفئات وعددها المناسب، لإفراغ البيانات في جدول تكراري مستمر، إلا أن ذلك يبقى أمرا فنيا يعود الى الباحث نفسه، ليتصرف حسب طبيعة البيانات من حيث عددها وكثافتها وحجمها، ولتسهيل الحسابات ينصح في الغالب بأن يكون طول الفئة من مضاعفات العدد 5 أو من مضاعفات عددا زوجيا، كما يفضل أن يحدد الحد الأدنى لأول فئة، بحيث

يجعل عملية حساب الحدود العليا و الدنيا للفئات الموالية سهلا، ففي مثالنا السابق، كان ينبغي أن يكون الحد الأدنى لأول فئة هو 14 بدلا من 16، حتى وان كانت القيمة 14 لاتوجد ضمن المعلومات الأولية، حيث أن هذا الرقم من مضاعفات العدد 7، أي من مضاعفات طول الفئة، وبالتالي يسهل لنا عملية حساب حدود الفئات الموالية، حتى وإن أدى ذلك الى إضافة فئة عن العدد الذي حددته لنا قاعدة ستيرجس.

رابعا: أنواع التوزيعات التكرارية المستمرة: تقدم الجداول التكرارية المستمرة بعدة صيغ منها ما يلي :

1- **التوزيع التكراري المغلق** : و فيه يكون الحد الأدنى لأول فئة والحد الأعلى لآخر فئة محددين، وقد يكون فيه مدى الفئات متساويا، و في هذه الحالة يسمى **بالتوزيع التكراري المنتظم**، و قد يكون مدى الفئات غير متساويا، وفي هذه الحالة يسمى **بالتوزيع التكراري غير المنتظم**، ويلجأ اليه الباحث عندما تكون البيانات الإحصائية كبيرة التشتت، وكثيرة التمركز في بعض الزمر .

2- **التوزيع التكراري المفتوح** : و فيه يكون إما الحد الأدنى لأول فئة غير محدد، أو الحد الأعلى لآخر فئة غير محدد، أو الحدين معا . ففي الحالة الأولى يسمى بالتوزيع التكراري **المفتوح من الأسفل**، أما في الحالة الثانية، فيسمى بالتوزيع التكراري **المفتوح من الأعلى**، أما في الحالة الأخيرة فيسمى بالتوزيع التكراري **المفتوح الطرفين** .



أمثلة 2-7:

توزيع تكراري مغلق

الفئات	f_i
08-04	5
12-08	7
16-12	3
20-16	1

جدول2-10

توزيع تكراري مفتوح من أسفل

الفئات	f_i
أقل من 8	5
12 - 08	7
16 - 12	3
20 - 16	1

جدول2-11

توزيع تكراري مفتوح من أعلى

الفئات	f_i
08 - 04	5
12 - 08	7
16. - 12	3
16 فأكثر	1

جدول2-12

توزيع تكراري مفتوح الطرفين

الفئات	f_i
أقل من8	5
12 - 08	7
16 - 12	3
16 فأكثر	1

جدول2-13

3-التوزيعات التكرارية المتجمعة : إن التوزيعات التكرارية كما رأينا لحد الآن، تظهر لنا فقط عدد مرات تكرار الفئة، ولمعرفة عدد التكرارات التي تقل، أوتساوي وتزيد عن حد معين من حدود الفئات بسهولة، فإنه يتم اللجوء الى جداول التوزيعات التكرارية المتجمعة، وهي التوزيع التكراري المتجمع النازل، و التوزيع التكراري المتجمع الصاعد.

***التوزيع التكراري المتجمع الصاعد** : يستخدم لغرض المعرفة السريعة لعدد أونسبة التكرارات التي تقل عن حد معين من حدود الفئات، وفي حساب بعض مقاييس الترعة المركزية (أنظر: فصل4)، في هذا التوزيع يكون عدد التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى لأول فئة يساوي عدد تكرارات أول فئة، وعدد التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى للفئة الثانية تساوي الى عدد تكرارات الفئة الأولى والثانية، أما عدد التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى للفئة الثالثة فيساوي الى مجموع تكرارات الفئة الأولى والثانية والثالثة، وهكذا، يستمر التجميع حتى الوصول الى التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى لآخر فئة، حيث يساوي الى مجموع التكرارات.

مثال2-8 : البيانات التالية تظهر عدد سكان دولة ما حسب فئات الأعمار من 10 الى 70 سنة.



i	الفئة (سنة)	عدد السكان (10^6 نسمة)
1	20–10	8
2	30–20	6
3	40–30	5
4	50–40	4
5	60–50	1
6	70–60	1
مجموع		25

جدول2–14

المطلوب : أوجد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد.

لو طرح علينا السؤال التالي : ماهو عدد السكان الذين تتراوح أعمارهم بين 30 وأقل من 40 سنة، لكانت الإجابة من الجدول السابق مباشرة وهي 5 مليون نسمة، غير أنه لو طرح علينا السؤال : ماهو عدد السكان الذين تقل أعمارهم عن 40 سنة ؟، لكانت الإجابة تتطلب وقتا لإجراء الحسابات قبل الإجابة على السؤال، اذ يتطلب الأمر جمع تكرارات الفئة الأولى والثانية و الثالثة والرابعة، أي (8+6+5)=19 مليون نسمة، وعلى هذا المنوال يتم إيجاد التكرارات التي تقل عن أي حد من حدود الفئات، وهو ما يظهره الجدول 2–15 أدناه.

i	الفئة	f_i	التكرار المتجمع الصاعد	
			الحد الأعلى	↗
2	20–10	8	أقل من 20	8
3	30–20	6	أقل من 30	14
4	40–30	5	أقل من 40	19
5	50–40	4	أقل من 50	23
6	60–50	1	أقل من 60	24
7	70–60	1	أقل من 70	25
مج		25		

جدول2–15



من الجدول السابق يمكن معرفة التكرارات التي تقل عن أي حد من حدود الفئات المحددة، ويلاحظ أن التجميع يجري **بصفة تصاعدية، أي من الأدنى الى الأعلى، لذلك سمي هذا التوزيع بالتوزيع التكراري المتجمع الصاعد**، ويرمز للتكرارات المتجمعة الصاعدة بسهم الى الأعلى.

والجدير بالذكر أنه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من الأعلى، أي الحد الأعلى لآخر فئة غير محدد، فيجب أن نكتب " مجموع التكرارات" بدل " أقل من"، وهذا عند الوصول لآخر فئة .

***التوزيع التكراري المتجمع النازل:** يستخدم لغرض المعرفة السريعة لعدد التكرارات التي تساوي أو تزيد عن حد معين من حدود الفئات . في هذا التوزيع يكون عدد التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى لأول فئة مساويا، لمجموع التكرارات، أما التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى للفئة الثانية، فتكون مساوية لمجموع التكرارات منقوصا منها تكرار الفئة الأولى، وبالمثل تكون التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى للفئة الثالثة مساوية الى مجموع التكرارات منقوصا منها تكرارات الفئة الأولى والثانية، وهكذا حتى نصل الى التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى لآخر فئة حيث يساوي الى تكرارات آخر فئة، و بمعنى آخر يكون مجموع التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى لآخر فئة يساوي الى تكرار آخر فئة، أما مجموع التكرارات التي تساوي أو تزيد عن الحد الأدنى للفئة ماقبل الأخير فيساوي الى مجموع تكرارات آخر فئة و الفئة التي تسبقها وهكذا...

مثال2-9: أوجد التكرار المتجمع النازل لبيانات المثال 2-8 .



بتطبيق فكرة التكرار المتجمع النازل، كما هي واضحة أعلاه نحصل على الجدول المطلوب التالي :

i	الفئة	f_i	التكرار المتجمع النازل	
			الحد الأدنى	↙
2	20–10	8	10 فأكثر	25
3	30–20	6	20 فأكثر	17
4	40–30	5	30 فأكثر	11
5	50–40	4	40 فأكثر	6
6	60–50	1	50 فأكثر	2
7	70–60	1	60 فأكثر	1
مج		25		

جدول2–16

من الجدول 2–16 يمكن معرفة وبكل سهولة عدد التكرارات التي تساوي أوتزيد عن أي حد من حدود الفئات المتضمنة في البيانات الأولية، وفيه يكون التكرار الذي يساوي أويزيد عن الحد الأدنى لآخر فئة مساويا الى تكرار آخر فئة، والتكرار الذي يساوي أو يزيد عن الحد الأدنى لأول فئة مساويا الى مجموع التكرارات . ويرمز للتكرارات المتجمعة النازلة بسهم الى الأسفل .

و الجدير بالذكر أن هناك من يعتبر التكرار المتجمع الصاعد كما قدمناه نازلا، و التكرار المتجمع النازل كما قدمناه صاعدا، و ذلك لإختلاف وجهة النظر بالنسبة للتجميع.

4- **التوزيع التكراري النسبي و المائوي** : لمعرفة نسبة تكرار أية فئة من مجموع التكرارات، يتم إيجاد **التكرار النسبي**، وذلك بقسمة تكرار كل فئة على مجموع التكرارات، فالتكرار النسبي للفئة اذن هو نسبة تكرار تلك الفئة الى مجموع التكرارات، وغالبا ما يتم ضربه في 100 للحصول على ما



يسمى **بالتكرار المائوي**، وهو يعطي النسبة المائوية لتكرار كل فئة ضمن مجموع التكرارات، أي:

$$f_i\,\% = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \times 100 \qquad 7-2$$

حيث : $f_i\%$: التكرار المائوي للفئة i و f_i تكرار الفئة i.

مثال2-10: الجدول التالي يظهر توزيع عينة من الطلبة حسب النتائج المحصل عليها في قسم دراسي يتكون من 10 طلبة، والمطلوب هو إيجاد التكرار المائوي .

i	العلامة	عدد الطلبة
1	5	1
2	6	4
3	7	2
4	8	1
5	9	1
6	10	1
مج		**10**

جدول2-17

الإجابة : بتطبيق المعادلة رقم 2-7 نجد :

$$f_1\,\% = \frac{1}{10} \times 100 = 10\ \%$$

يعني هذا أن 10 % من الطلبة حصلوا على علامة تقدر بـــ: 5، ويتم إيجاد بقية التكرارات المائوية بنفس الطريقة، وتظهر النتائج في الجدول التالي :

i	العلامة	f_i	$f_i\,\%$
1	5	1	10
2	6	4	40
3	7	2	20
4	8	1	10
5	9	1	10
6	10	1	10
مج		**10**	**100**

جدول2-18



في غالب الأحيان يتم استخدام التكرار المائوي على النحو الذي رأينا آنفا، غير أنه يتم أحيانا إستخدام التكرار الألفي، أو النسبة الألفية بدل النسبة المائوية، وفي هذه الحالة يتم ضرب التكرار النسبي في 1000 بدل 100.

وما تجدر الإشارة اليه هو أن مجموع التكرارات النسبية يكون دائما مساويا الى الواحد الصحيح، بينما مجموع التكرارات المائوية فيساوي الى 100، كما هو واضح في المثال أعلاه.



تمـــاريـــــن.

تمرين 1: مصنع به 49 عاملا، حصـــرت حالتـــهم العائليـــة مـــن خـــلال إستمارات خاصة وزعت عليهم فكانت الإجابات على النحـــو التـــالي:

أعزب	أعزب	متزوج	أعزب	أعزب	أرمل	متزوج
أعزب	أعزب	متزوج	متزوج	أرمل	أعزب	مطلق
أعزب	أعزب	متزوج	مطلق	متزوج	أعزب	أعزب
مطلق	مطلق	متزوج	متزوج	مطلق	أعزب	أعزب
أعزب	متزوج	متزوج	مطلق	أعزب	متزوج	متزوج
مطلق	أعزب	أعزب	أعزب	متزوج	أعزب	أعزب
متزوج	أعزب	أعزب	أمطلق	أمطلق	متزوج	أعزب

المطلوب: 1- ما نوع هذه البيانات. 2- بوب هذه البيانات في جدول مناسب.

تمرين2: لمعرفة شعب البكالوريا للطلبة المسجلين في الفوج الأول من الســـنة الأولى علوم إقتصادية حسب الجنس، أعدت إستمارات خاصة لأجل ذلـــك، وكانت الإجابات من خلالها كما يلي:

شعبة	جنس	شعبة	جنس	شعبة	جنس	شعبة	جنس	شعبة	جنس	شعبة	جنس
ع	ث	ر	ث	ر	ث	ر	ذ	أ	ذ	ع	ث
أ	ث	ر	ذ	ر	ذ	ع	ث	ع	ث	ر	ذ
أ	ث	أ	ذ	ر	ذ	ع	ذ	ع	ذ	ع	ذ
ر	ث	ر	ذ	ع	ذ	أ	ث	ر	ذ	ع	ث
ر	ث	ر	ث	ع	ث	ع	ذ	أ	ذ	ع	ذ
ر	ذ	ع	ذ	ع	ذ	أ	ث	أ	ث	ع	ذ

ملاحظة : أ : أداب. ر : رياضيات. ع : علوم. ذ : ذكر. ث : أنثى.

المطلوب: 1- إفرغ هذه البيانات في جدول مناسب. ما نوع هذا الجدول ؟.

تمرين3: حصرت الأجور الأسبوعية لعمال أحد المصانع بمئات الدينـــارات، كما يلي :

35	37	36	36	35	38	39	44	40	41
42	44	43	40	41	44	40	43	41	42
40	42	41	43	41	45	49	48	47	42
48	45	41	48	45	50	46	55	52	48
43	49	51	55	50	59	54	58	41	47

المطلوب:1-أوجد طول الفئات المناسب لإفراغ هذه البيانات في جدول تكراري مستمر. ما هو عدد الفئات عندئذ ؟ وضح كيف يتم حساب ذلك.

2- إذا كان : L=400 دينار، إفرغ هذه البيانات في جدول تكراري مستمر.

3- من البيانات المحصل عليها من السؤال: ا-أوجد التكرار المائوي.

ب- أوجد التكرارين المتجمعين الصاعد و النازل ثم التكرارين المائويين المتجمعين الصاعد و النازل.

تمرين4: البيانات التالية خاصة بمساحة وعدد سكان الدول العربية سنة 2003 حسب البيانات الديمغرافقي للأمم المتحدة.

(عدد السكان بالآلف، المساحة بالكيلومتر مربع)

الدولة	عدد السكان	المساحة	الدولة	عدد السكان	المساحة
الجزائر	31800	2381741	المغرب	30566	446550
السعودية	24217	2149690	موريتانيا	2893	1025520
البحرين	724	678	عمان	2851	212457
مصر	71931	1001449	قطر	610	11000
إ.ع. المتحدة	2995	83600	الصومال	9890	637657
العراق	25175	438317	السودان	33610	2505813
الأردن	5473	97740	سوريا	17800	185180
الكويت	2521	17818	تونس	9832	163610
لبنان	3653	10400	اليمن	20010	527968
ليبيا	5551	1759540	ج.ع. الصحراوية	-	266000

المطلوب:1- أوجد مساحةالوطن العربي،ومساحة المغرب العربي الكبير، والكثافة السكانية فيهما. 2- أوجد النسبة المائوية لمساحة كل دولة من المساحة الكلية للوطن العربي. 3- أوجد النسبة المائوية لسكان كل دولة من مجموع سكان الوطن العربي. 4- ماهي النسبة المائوية لمساحة دول المغرب العربي الكبير من مجموع مساحة الوطن العربي. و ماهي النسبة المائوية لسكان المغرب العربي الكبير من مجموع سكان الوطن العربي. نفس السؤال بالنسبة لدول الخليج العربي.



تمرين5: الجدولين التاليين يعرضان توزيع السكان المقيمين في الجزائر حسب فئات الأعمار سنتي 2000 و 1993 بالآلاف على التوالي.

توزيع سكان الجزائر حسب فئات الأعمار و الجنس سنة 2000

المصدر: الجزائر بالأرقام العدد31 الديوان الوطني للإحصائيات/ www.ons.dz

ذكور	إناث	الفئة/سنة	ذكور	إناث	الفئة/سنة
626	611	45-49	1534	1495	0-4
441	447	50-54	1799	1720	5-9
346	362	55-59	1933	1860	10-14
316	334	60-64	1890	1817	15-19
267	283	65-69	1617	1571	20-24
185	194	70-74	1352	1331	25-29
112	115	75-79	1149	1136	30-34
112	125	80 فأكثر	930	918	35-39
15360	**15026**	مجموع	751	744	40-44

توزيع سكان الجزائر حسب فئات الأعمار و الجنس سنة 1993

المصدر: المجموعة الإحصائية الديوان الوطني للإحصائيات 1994.ص:22

ذكور	إناث	الفئة/سنة	ذكور	إناث	الفئة/سنة
564	542	40-44	1886	1804	0-4
410	418	45-49	1856	1776	5-9
335	357	50-54	1750	1677	10-14
304	329	55-59	1528	1461	15-19
254	274	60-64	1311	1268	20-24
191	204	65-69	1121	1101	25-29
136	145	70-74	919	892	30-34
175	183	75فأكثر	731	694	35-39

1-هل هذين التوزيعين صحيحين إحصائيا، إذا كانا غير صحيحين وضح لماذا؟.



2-حول هذين التوزيعين الى توزيعين تكراريين مستمرين بجعل : L =5 سنوات، بدل : L=4، مع الإحتفاظ بنفس عدد السكان لكل فئة كما هي في الجدول.

3- من الجدول المحصل عليه من السؤال2:

ا-أوجد مجموع سكان كل فئة للتوزيعين

ب- أوجد التكرار المائوي للجنسين لكل فئة(نسبة كل فئة) و لكل توزيع.

ج-أوجد التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل للجنسين و للتوزيعين.

د-أوجد التكرارين المائويين المتجمعين الصاعد والنازل للجنسين و لكل توزيع.

4- أوجد مجموع سكان كل فئة للتوزيعين و أجب على الأسئلة التالية:

أ- ماهي نسبة السكان الذين تقل أعمارهم عن : 10سنوات، 20 سنة، 30 سنة، 40 سنة من كل توزيع.

ب- ما هي نسبة السكان الذين تساوي أو تزيد أعمارهم عن: 10 سنوات، 20 سنة، 30 سنة، 40 سنة من كل توزيع.

ج- إذا كان سن الشباب يتراوح بين 20 و 40 سنة، ما هي نسبة شباب الجزائر سنة 1993 و سنة 2000. ماذا تستنتج.

د- إذا كان سن الشيخوخة يبدأ من 60 سنة، فماهي نسبة الشيخوخة في الجزائر سنة 2000 و سنة 1993. ماذا تستنتج.

8- أعد تقديم البيانات عن طريق جدول تكراري مستمر بجعل طول الفئة:L=10 للتوزيعين، ثم أعد الإجابة على كل فروع السؤال3 .



الفصل الثالث

العـــرض البيـــانـــي.

إن عـرض البيانـات الإحصائيـة بـالطرق الإنشـائية أوعـن طريـق الجداول الإحصائية كمـا رأينـا، قـد يكـون مملا أو صعـب الفـهم، خاصة إذا ما كـانت هـذه البيانـات موجهـة مـن خـلال الجرائـد أو المجلات أولوحات التبليغ الى عامـة النـاس، لـذا يلجـأ في الكثـير مـن الأحيـان الى تقـديم البيانـات الإحصائيـة عـن طريـق الرسـومات، بأساليب معينة، و فـق خصـائص محـددة، بغيـة تبسـيطها و تسـهيل تحليلـها.

أولا: مواصفـات الأشـكال البيانيـة: يجـب أن تتصـف الأشـكال البيانيـة الـتي تعـرض عـن طريقـها البيانـات الإحصائيـة بمجموعة من المواصفات منـها مـا يلـي:

- أن يكون الشكل جيدا مـن حيـث التقـديم وملفتـا للإنتبـاه.
- أن يكون لـه عنوانـا في غايـة الوضـوح والإختصـار، ومحـددا لكل ما يعبر عنه الرسم مـن معلومـات بمـا فيـها المكـان والزمـان، و وحدة القيـاس.
- أن تكون وحدات القيـاس محـددة بدقـة.
- أن يكون مقياس الرسم واضحا، إذا كانت البيانـات مقدمـة علـى معلم.
- أن يشـار الى الألـوان والرمـوز المسـتخدمة في تبيـان محتويـات الرسم، على جانب الرسم أو على الهامش لتوضيـح معناهـا.
- أن يذكر مصدر الرسم أو المعلومـات الـتي يعـبر عنـها، أسـفله أوعلى الهـامش.

و هناك أشـكال و رسـومات كثـيرة مسـتخدمة في عـرض البيانـات الإحصائية منها مـا يلـي :



ثانيا: الرسومات التكرارية : هي الرسومات التي تعرض البيانات المقدمة في جداول تكرارية، ومنها :

1- الأعمدة التكرارية : وهي تستخدم لتقديم البيانات الإحصائية التي لامدى لفئاتها، و البيانات ذات الصفات النوعية، و لتقديم البيانات بهذه الطريقة، يتم إعداد معلم متعامد، بحيث توضع الفئات (سواء كانت ذات صفات كمية، أو ذات صفات نوعية) على المحور الأفقي، أما على المحور العمودي فيتم وضع التكرارات، و يتم الرسم كما في الشكل3-1.

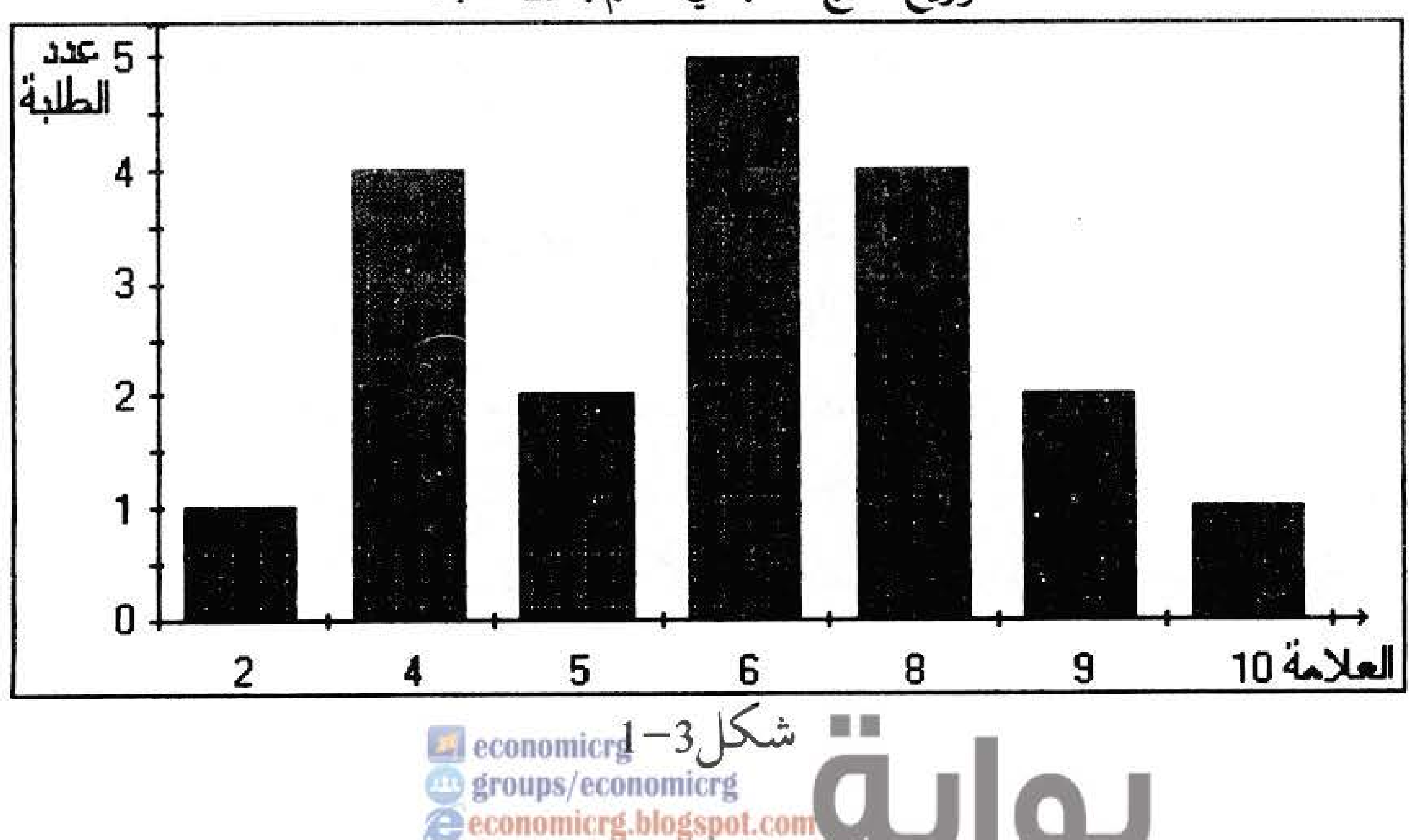
مثال3-1: البيانات الواردة في الجدول التالي تظهر، توزيع عينة من الطلبة حسب النتائج المحصل عليها في قسم به 19 طالب، والمطلوب تقديمها على شكل أعمدة تكرارية.

العلامة	2	4	5	6	8	9	10	مج
عدد الطلبة	1	4	2	5	4	2	1	19

جدول3-1

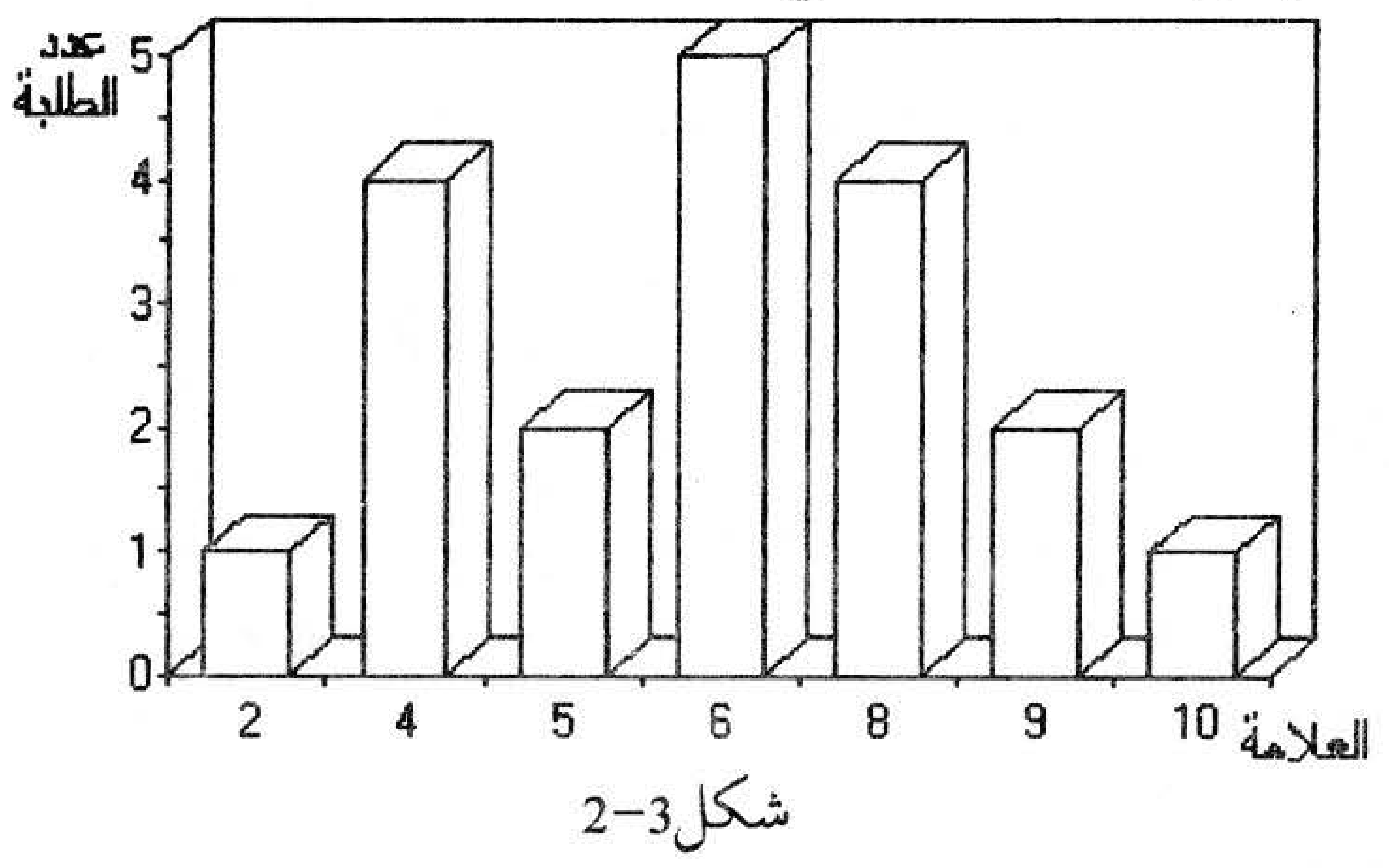
الإجابة: بتطبيق القاعدة أعلاه نحصل على البيان التالي:

توزيع نتائج الطلبة في قسم به19 طالبا.



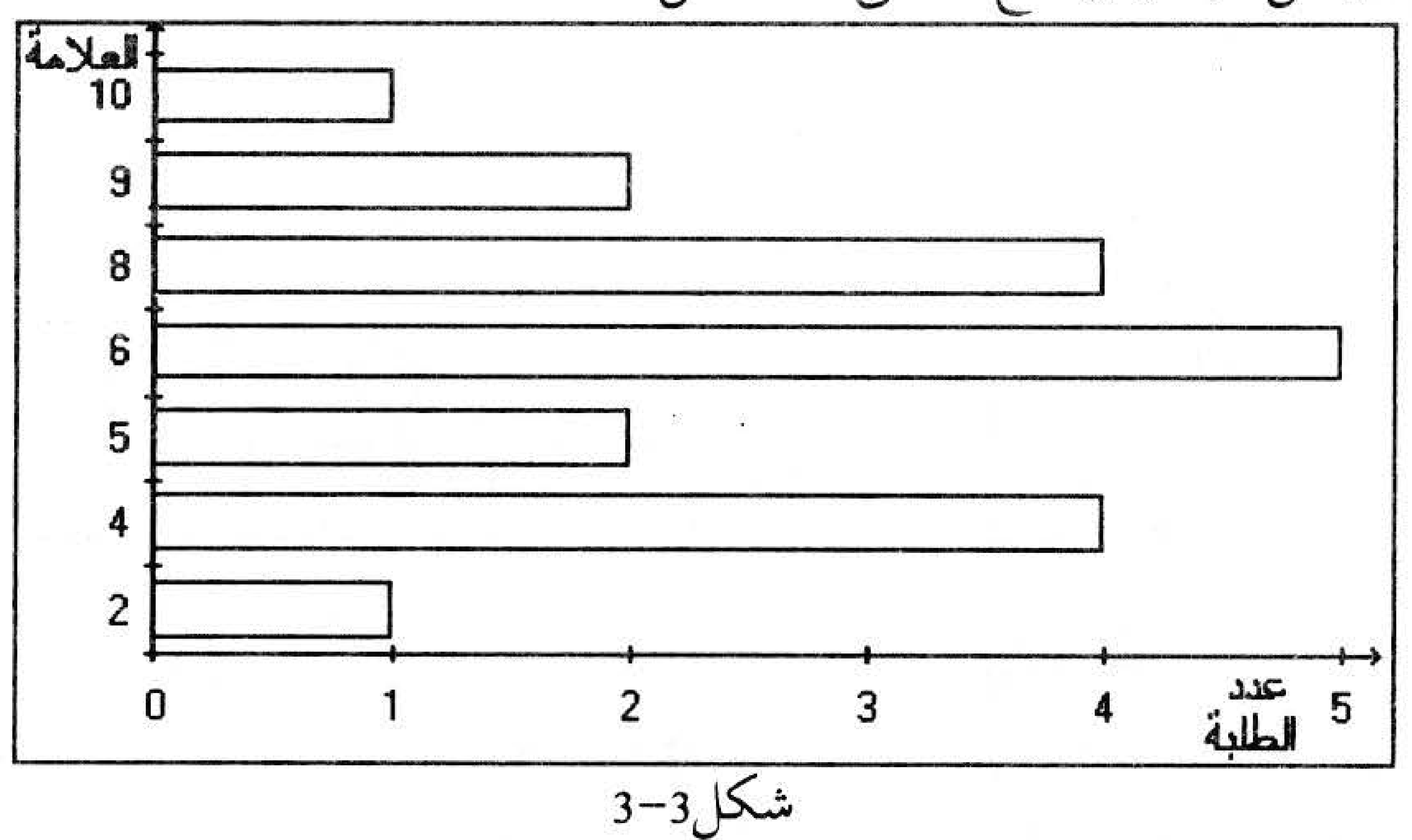
شكل3-1

ويمكن تقديم مثل هذه البيانات بأشكال مختلفة مع الحفاض على نفس المبدأ و من ذلك ما يلي:



شكل3-2

كما يمكن قلبه ليصبح على الشكل :



شكل3-3

فكل الأشكال السابقة ما هي إلا تجسيد لفكرة الأعمدة التكرارية، لكن بطرق مختلفة قليلا.

مثال 3-2: البيانات التالية تظهر توزيع مساحة مزرعة ما، حسب أنواع المزروعات خلال الموسم الفلاحي2004/2003، و**المطلوب** تقديم هذه البيانات بطريقة الأعمدة التكرارية.

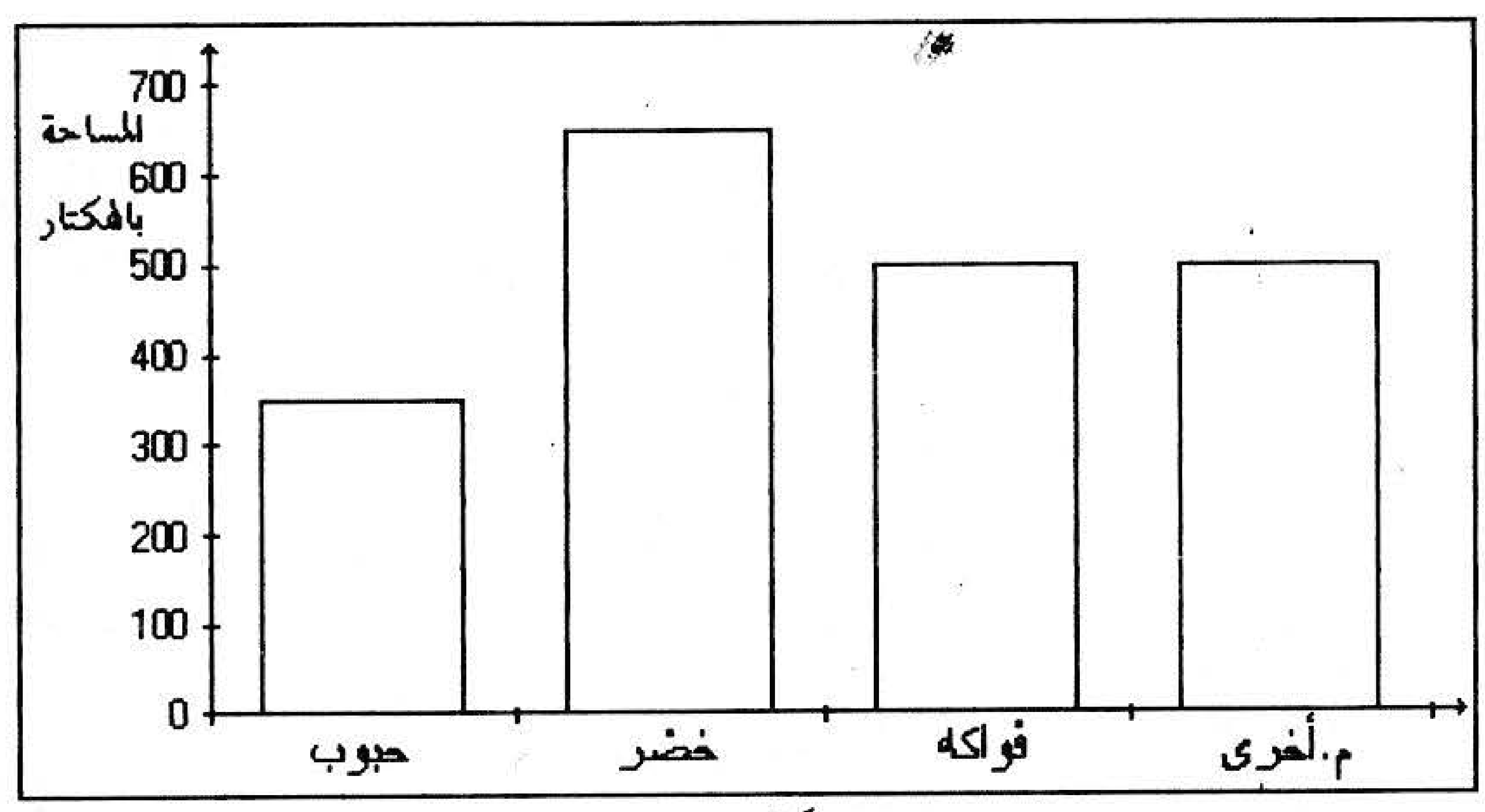


المزروعات	المساحة (هكتار)
الحبوب	350
الخضر	650
الفواكه	500
م.أخرى	500

جدول3-2

كما سبقت الإشارة فإن أوصاف الظاهرة، وهي في مثالنا أنواع المزروعات، توضع على المحور الأفقي، أما المساحة فتوضع على المحورالعمودي، ويكون الشكل المطلوب كما يلي :

توزيع مساحة مزرعة ما حسب أنواع المزروعات خلال الموسم 2004/2003



شكل3-4

ويمكن التفنن في تقديم مثل هذه البيانات، كما في الشكلين 3-3 و3-2، أوبرسم أنواع المزروعات في الأعمدة المناسبة في الشكل 3-4، كأن نرسم في عمود الفواكه حبة برتقال، أو تفاح... وفي عمود الحبوب سنبلة قمح أوشعير... ونستغني بذلك عن الكتابة تحت الأعمدة، أي أن نستعمل الأسلوب الملفت للإنتباه و الذي يؤدي الى فهم و تحليل محتوى الشكل بأسرع ما يمكن.

2-**المدرج التكراري** : يستخدم في غالب الأحيان لتقديم البيانات الإحصائية التي مدى فئاها أكبر من الصفر، إذ توضع الفئات الفعلية

على المحور الأفقي والتكرارات على المحور العمودي، وحيث أن الفئات التكرارية قد تكون متساوية الأطوال وقد تكون غير متساوية الأطوال، لذلك فهناك نوعين من المدرجات التكرارية:

•مدرج البيانات التكرارية المتساوية الأطوال : يتم رسمه على معلم متعامد حيث يوضع على المحور الأفقي الفئات، وعلى المحور العمودي التكرارات، مع تقسيم المحورين بحيث يكفي المحور الأفقي لتمثيل كل الفئات والمحور العمودي لتمثيل كل التكرارات(يتم ذلك بتقسيم أكبر قيمة من مجموعة القيم على طول المحور المعد للرسم، حيث نحصل على القيم التي تمثلها كل سلمية على المحور)، و نقوم بعد ذلك برسم مستطيلات، ضلعها الأفقي يساوي طول الفئة وضلعها العمودي يساوي قيمة تكرار تلك الفئة، وذلك بالنسبة لجميع الفئات، والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 3-3 : البيانات التالية تظهر توزيع الموظفين في القطاع العمومي في مدينة ما حسب فئات الأعمار، بآلاف الأشخاص.

i	فئات الأعمار (سنة)	العدد
1	25-20	9
2	30-25	10
3	35-30	15
4	40-35	15
5	45-40	10
6	50-45	9
7	55-50	9
8	60-55	6
9	65-60	4

جدول3-3

المطلوب : تقديم هذه البيانات في شكل مدرج تكراري.

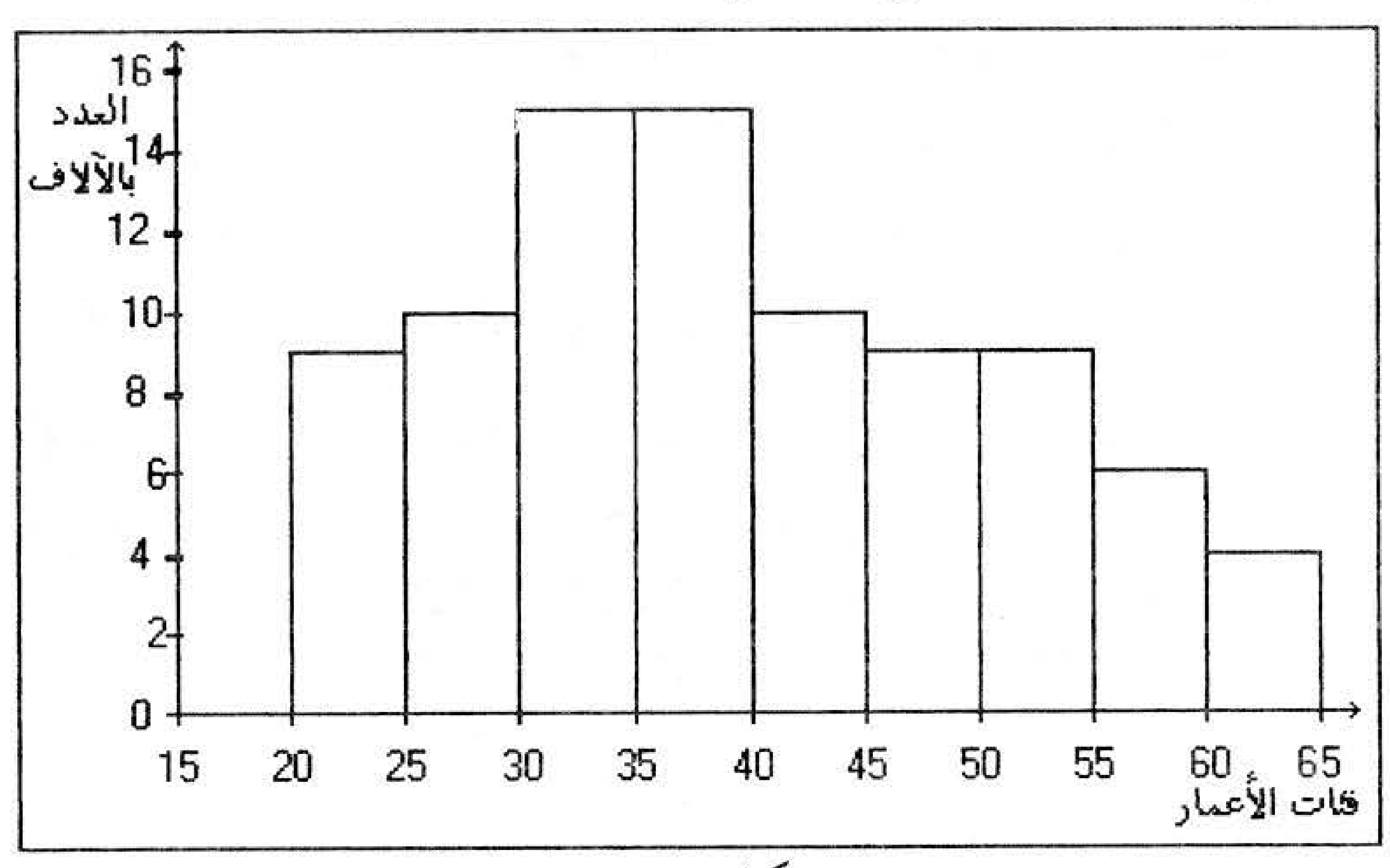


الإجابة : أكبر قيمة من قيم التكرارات هي 15 بينما طول المحور العمودي المعد للرسم هو 4 سم، لذلك فان السلمية الواحدة من هذا المحور تساوي : 15\4 = 4 تقريبا.

بينما أكبر قيمة للفئات هي 65 و طول المحور المعد للرسم هو : 13 سم، لذلك فإن طول السلمية الواحدة يساوي الى : 65\13 =5.

وبتطبيق فكرة الرسم أعلاه نحصل على الشكل التالي:

توزيع الموظفين في القطاع العمومي في مدينة ما حسب فئات الأعمار



شكل3-5

من الواضح أن الشكل أعلاه يشبه المدرج، لذلك سمي بالمدرج التكراري.

يلاحظ من الشكل 3-5 أن مساحة المستطيلات تتناسب مع تكراراتها، فإذا كانت قاعدة المستطيلات هي L (طول الفئة) وإرتفاعها هو y_i (تكرار الفئة) فإن:

$$\frac{\text{مساحة المستطيل}1}{f_1}=\frac{\text{مساحة المستطيل}2}{f_2}=\frac{L_1Y_1}{f_1}=\frac{L_2Y_2}{f_2} \qquad 1-3$$

و هو المبدأ الذي تقوم عليه فكرة المدرجات التكرارية، و بما أن أطوال الفئات متساو، فيبقى التناسب فقط بين ارتفاع المستطيلات والتكرارات أي:



$$\frac{y_1}{f_1} = \frac{y_2}{f_2} = ...$$

*** مدرج البيانات التكرارية غير المتساوية الأطوال:** في هذه الحالة ولجعل المدرج متزنا من حيث الشكل، فإنه يتم أولا إجراء تعديل على التكرارات، وذلك بإيجاد ما يسمى بالتكرار المعدل و ذلك بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى : طريقة النسبة الى طول الفئة : (أكثر شيوعا).

كما هو واضح من اسم هذه الطريقة فإنه يتم إيجاد ما يسمى **بالتكرار المعدل** وذلك بقسمة تكرار كل فئة على طول الفئة المقابلة أي :

$$fcl_i = \frac{f_i}{L_i} \qquad 2-3$$

حيث: fcl_i التكرار المعدل بالطريقة الأولى للفئة i مع $i = 1,2,3.....N$ ، و يتم وضع التكرار المعدل على المحور العمودي أما الفئات فيتم وضعها على المحور الأفقي، ويتم الرسم بعد ذلك بصفة عادية.

القاعدة هي أنه عند رسم المضلع التكراري يجب الحفاظ على التناسب بين التكرارات المعدلة وإرتفاع المستطيلات، وهذا هو المبدأ الذي تقوم عليه هذه الطريقة.

الطريقة الثانية : طريقة النسبة الى مضاعف أدنى طول فئة: كما هو واضح أيضا من إسم هذه الطريقة فإنه يتم إيجاد التكرار المغدل وذلك بقسمة تكرار كل فئة على مضاعف أدنى طول فئة في التوزيع، فإذا كانت لدينا بيانات تكرارية مستمرة، أطوالها على التوالي:

$$c_1.L\ ,\ c_2.L\ ,\ c3.L....\ c_n.L$$

حيث L أصغر طول من أطوال الفئات ، c_i: معامل (حاصل قسمة طول الفئة i على L).

وتكراراتها على التوالي هي : $f_1,\quad f_2,\quad f_3......f_n$

فان التكرار المعدل لكل فئة i يكتب بالصيغة التالية:



$$fc2_i = \frac{f_i}{c_i} \qquad 3-3$$

حيث: $fc2_i$ التكرار المعدل بالطريقة الثانية للفئة i مع i= 1,2,3.....N

ولرسم المدرج يتم وضع الفئات على المحور الأفقي والتكرارات المعدلة على المحور العمودي، و يجري الرسم بصفة عادية.

تقوم هذه الطريقة أيضا على مبدأ التناسب بين مساحة المستطيلات والتكرارات، أي أنه عند رسم المدرج التكراري بهذه الطريقة ينبغي مراعاة التناسب بين التكرارات المعدلة و إرتفاعات المستطيلات.

مثال3-4: ارسم المدرج التكراري للبيانات التالية :

6	5	4	3	2	1	i
65-55	55-40	40-35	35-25	25-15	15-10	الفئة
10	27	15	24	16	6	f_i

جدول3-4

الإجابة: من الجدول أعلاه يلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، لذلك يتم استخدام التكرار المعدل المعرف بإحدى الطريقتين المشار اليهما أعلاه، والمحسوب في الجدول 3-5 أدناه، اذ يحتوي على التكرار المعدل بالطريقة الأولى في العمود 5 وعلى التكرار المعدل بالطريقة الثانية في العمود 8.

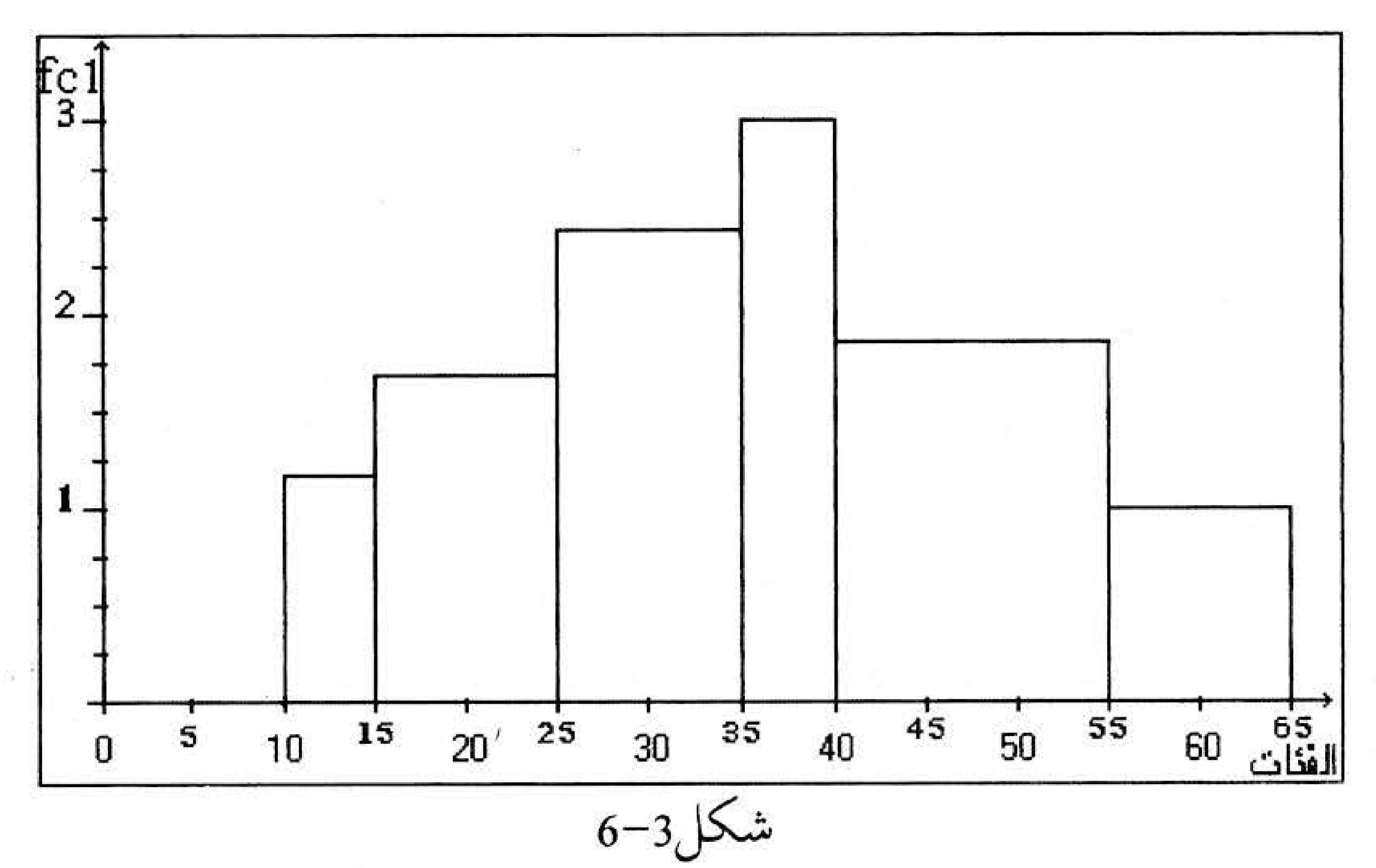
$fc2_i$	c_i	$c_i.L$	$fc1_i$	L_i	f_i	الفئة	i
6	1	1×5	1.2	5	6	15-10	1
8	2	2×5	1.6	10	16	25-15	2
12	2	2×5	2.4	10	24	35-25	3
15	1	1×5	3	5	15	40-35	4
9	3	3×5	1.8	15	27	55-40	5
5	2	2×5	1	10	10	65-55	6

جدول3-5

ويكون المدرج التكراري المطلوب بالطريقة الأولى والثانية في الشكلين 3-6 و3-7 على التوالي هو :

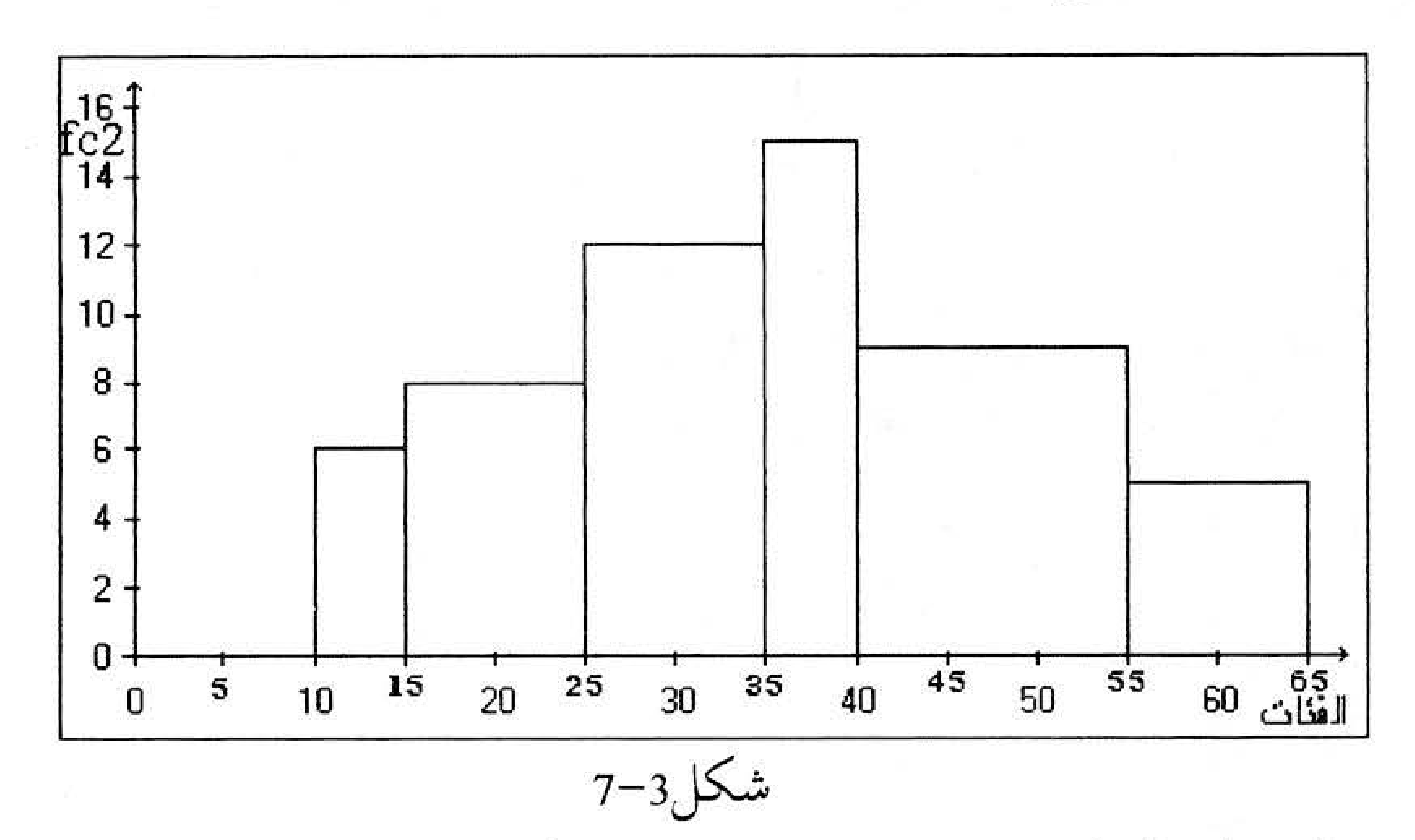


مدرج تكراري معدل لبيانات المثال3–4 بالطريقة الأولى.



شكل3–6

مدرج تكراري معدل لبيانات المثال 3–4 بالطريقة الثانية.



شكل3–7

3– **المضلع التكراري** : ويغلب إستخدامه أيضا في حالة البيانات التي طـول فئاتها أكبر من الصفر، ويتم ذلك حسب الخطوات التالية :



* نرسم معلم متعامد، نضع على محوره الأفقي مراكزالفئات، وعلى محوره العمودي التكرارات، حيث : (مركز الفئة = الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى لها مقسوما على 2) أي :

$$c_i = \frac{T_{i+1} + T_i}{2} \qquad 4-3$$

حيث : c_iمركز الفئة i ، T_{i+1}: الحد الأعلى للفئةi ، T_i : الحد الأدنى للفئة i.

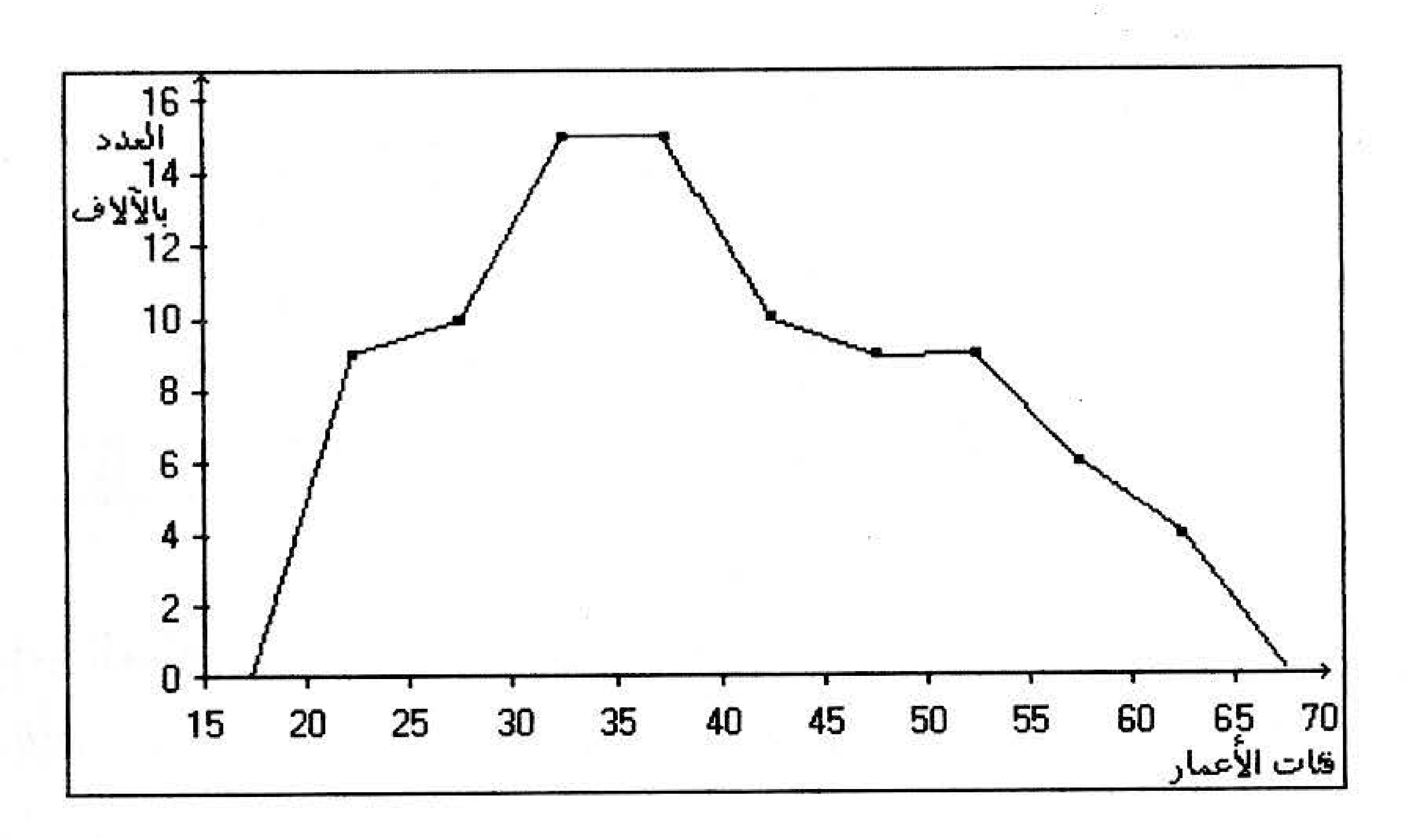
* نعين النقاط التي إحداثياتها مراكز الفئات والتكرارات المقابلة لها، ثم نصل بينها فنحصل على خط منكسر.

* لكي نحصل على مضلع، يتم إحداث مركز فئة تصوري سابق لأول فئة، وآخر لاحق لآخر فئة، تكراراتهما معدومة، ثم نصل طرفي الخط المنكسر بهتين النقطتين.

مثال3-5: ارسم مضلع تكراري لبيانات المثال 3-3.

الإجابة: لرسم المضلع التكراري المطلوب نتبع الخطوات المشار اليها أعلاه فنحصل على الشكل التالي :

توزيع الموظفين في القطاع العمومي في مدينة ما حسب فئات الأعمار



شكل 3-8

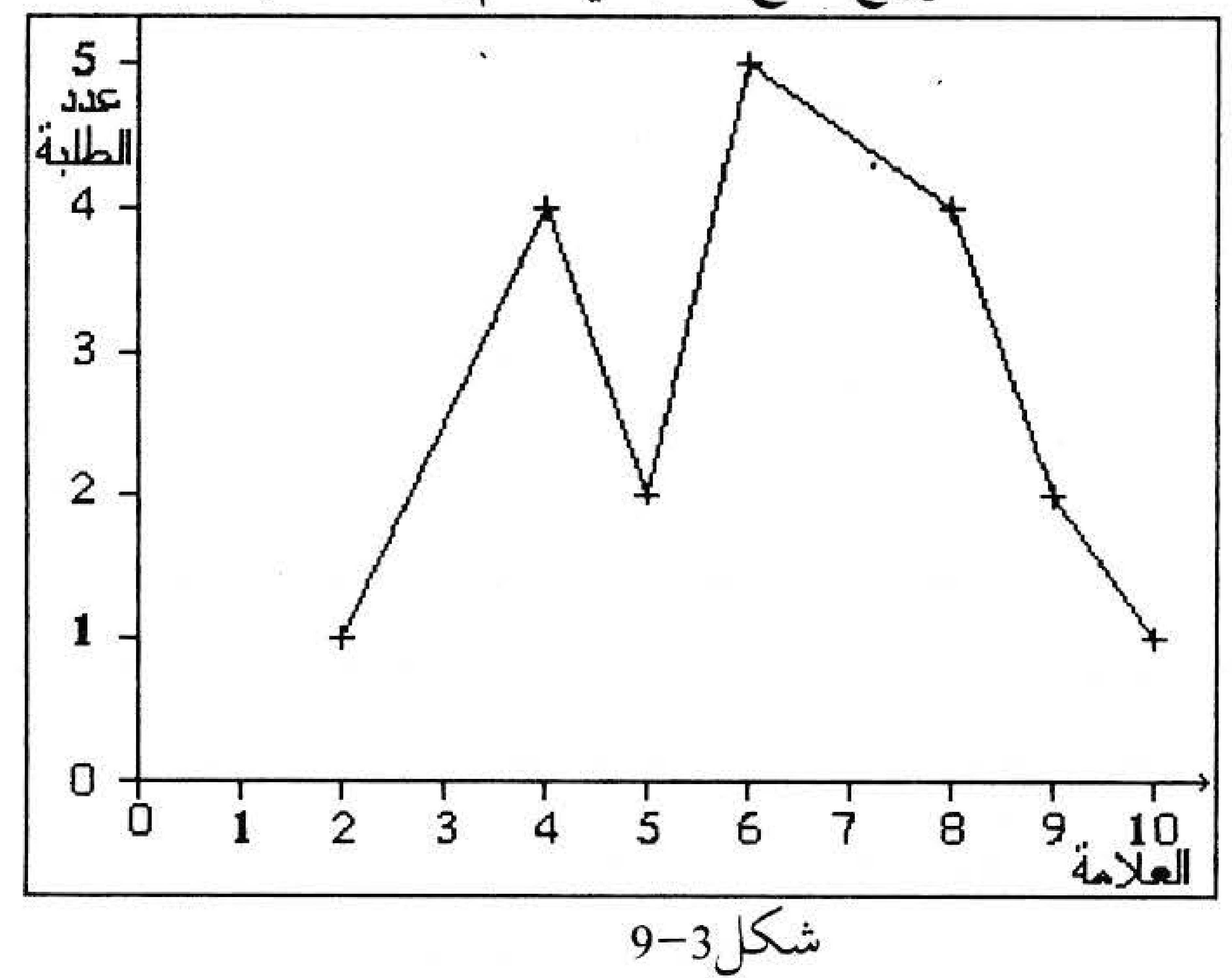


4- **المنحنى التكراري** : وهو المنحنى المحصل عليه بالوصل بين الفئات وتكراراتها في حالة البيانات التكرارية غير المستمرة، وبين النقاط المحددة لمراكز الفئات وتكراراتها في حالة البيانات التكرارية المستمرة.

مثال3-6: إرسم المنحنى التكراري لبيانات المثال 3-1.

البيانات المشار إليها بيانات تكرارية غير مستمرة، منحناها التكراري يكون حسب الشكل3-9.

توزيع نتائج الطلبة في قسم به 19 طالب.



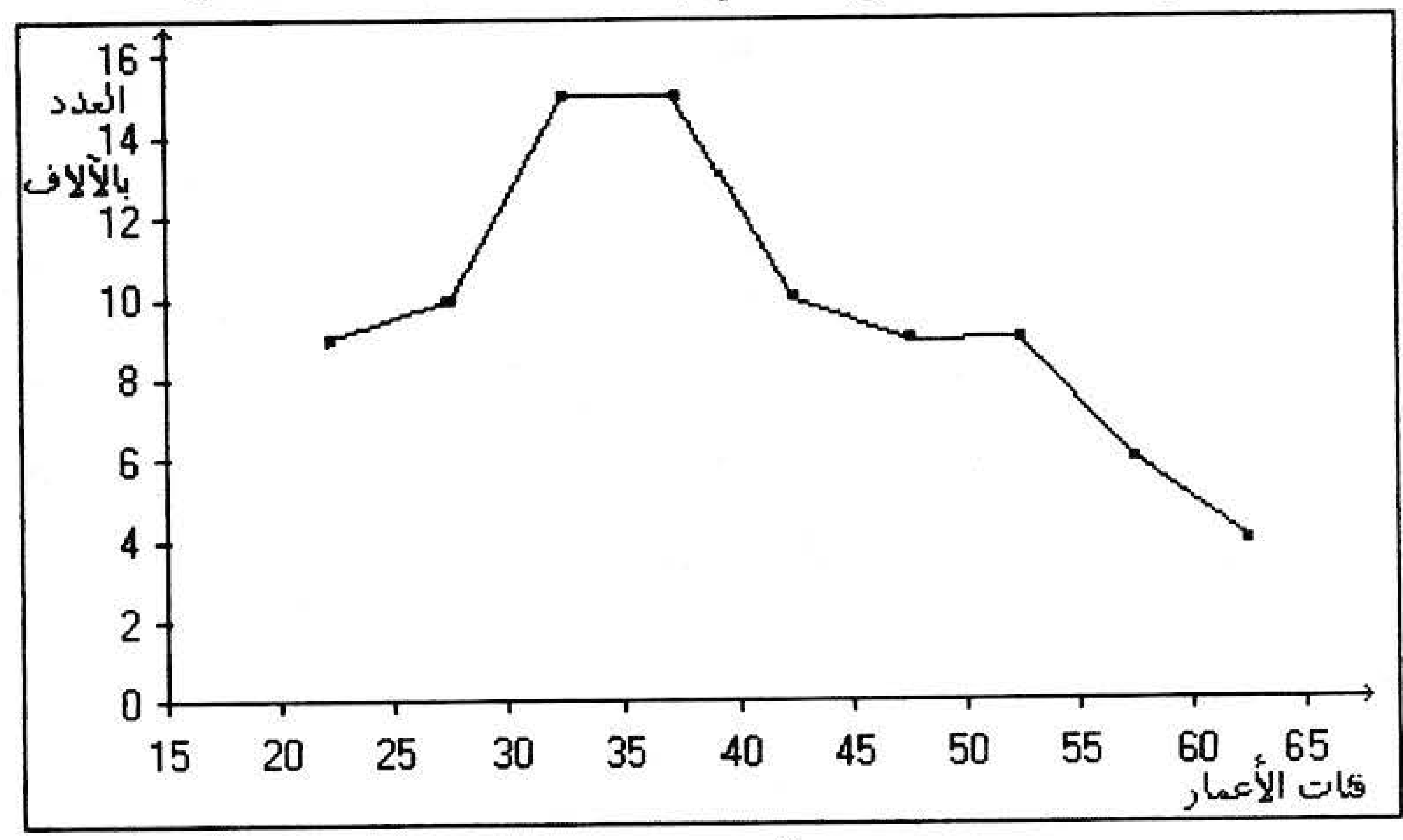
شكل3-9

مثال3-7: ارسم المنحنى التكراري لبيانات المثال 3-3.

الإجابة:البيانات المشار اليها هي بيانات تكرارية مستمرة، منحناها التكراري يكون حسب الشكل 3-10، محوره الأفقي يمثل مراكز الفئات، و محوره العمودي يمثل التكرارات.



توزيع الموظفين في القطاع العمومي في مدينة ما حسب فئات الأعمار



شكل3-10

وقـد يتـم إسـتبدال الخطـوط المسـتقيمة الواصلـة بـين النقـاط بخطوط ممـهدة.

5- المـدرج التكـراري المتجمـع : ويمكـن أن يكـون إمـا صـاعدا أو نـازلا (أنظـر التوزيـع التكـراري المتجمـع الصـاعد و التوزيع التكراري المتجمـع النـازل في الفصـل السـابق).

* **المـدرج التكـراري المتجمـع الصـاعد** : ويتـم تقديمـه علـى معلـم متعـامد، بحيـث توضـع الفئـات علـى المحـور الأفقـي والتكرارات المتجمعة الصـاعدة علـى المحـور العمـودي، ويتـم رسـم المدرج بشكل مشابه للمـدرج التكـراري كمـا ورد آنفـا.

* **المـدرج التكـراري المتجمـع النـازل** : لتقـديم البيانـات بهذا الشـكل يتـم إيجـاد التكـرار المتجمـع النـازل، ثم رسـم معلـم متعامد، بحيـث نضـع علـى محـوره الأفقـي الفئـات وعلـى محـورة العمودي التكـرارات المتجمعـة النازلـة، ويتـم رسـم المـدرج أيضـا بشكل مشابه للمـدرج التكـراري.



مثال3-8: قدم البيانات التالية مرة في شكل مدرج تكراري متجمع صاعد، وأخرى في شكل مدرج تكراري متجمع نازل.

f_i	الفئة	i
5	3-2	1
8	4-3	2
12	5-4	3
6	6-5	4
4	7-6	5
35		مج

جدول3-6

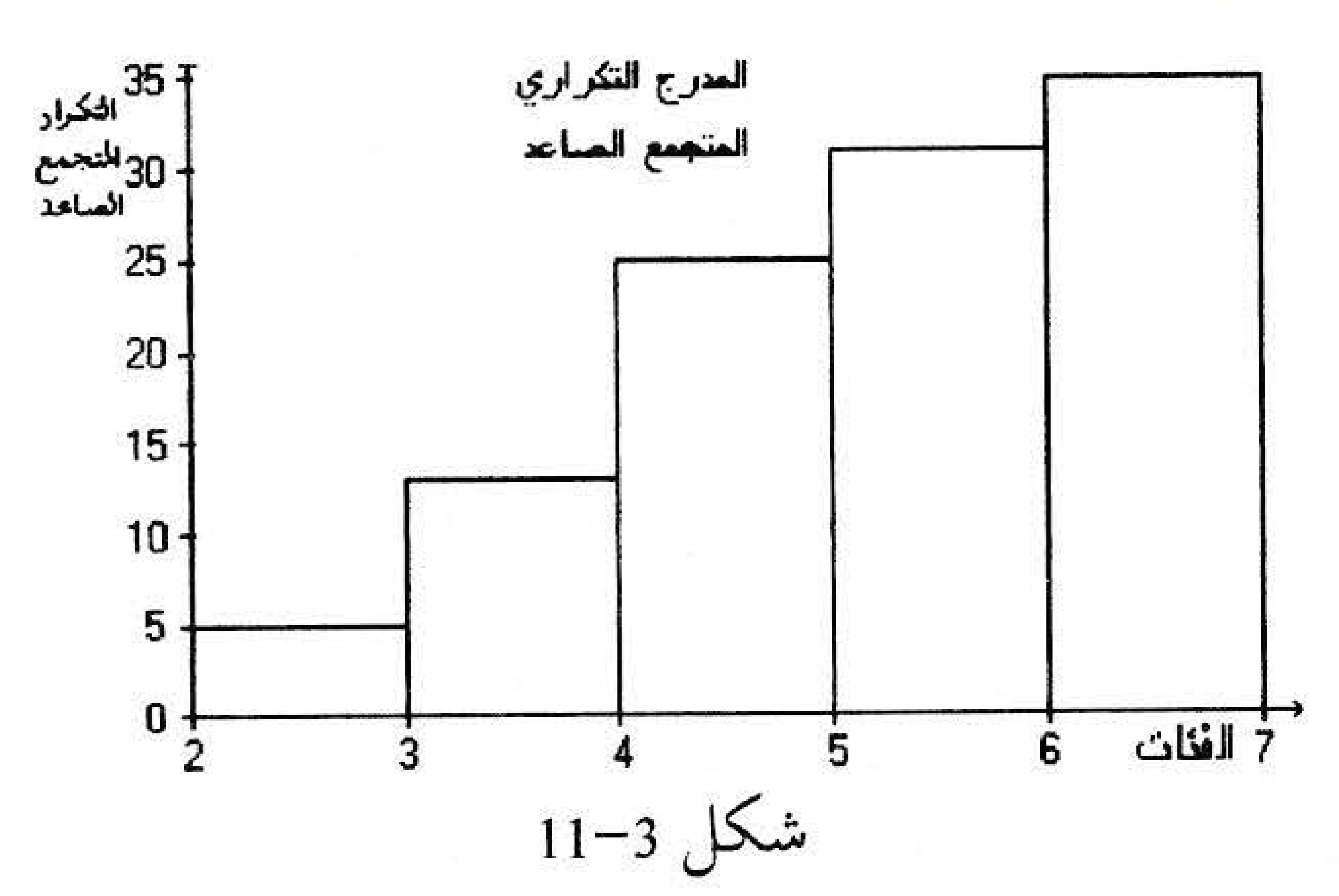
* **المدرج التكراري المتجمع الصاعد** : لرسمه نوجد التكرار المتجمع الصاعد كما هو واضح أدناه :

↗	الحد الأعلى	f_i	الفئة	i
5	أقل من 3	5	3-2	1
13	أقل من 4	8	4-3	2
25	أقل من 5	12	5-4	3
31	أقل من 6	6	6-5	4
35	أقل من 7	4	7-6	5
		35		مج

جدول3-7

ويكون الرسم المطلوب كمالي:





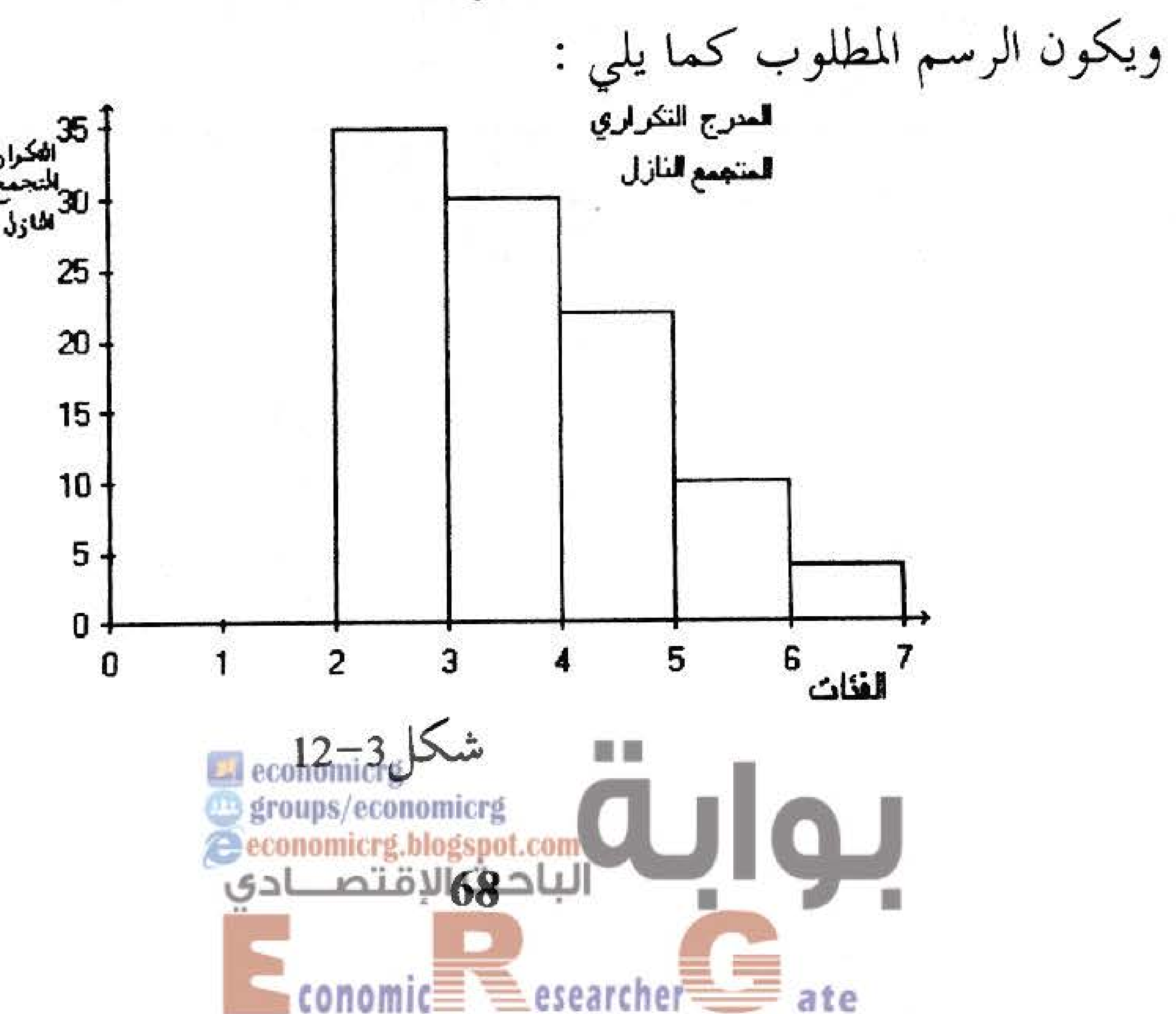
شكل 3-11

* **المـدرج التكـراري المتجمـــع النـــازل** : لرسمـــه نوجـــد التكرار المتجمع النازل كمـــا يوضحـــه الجـدول التـــالي :

↘	الحد الأدنى	f_i	الفئة	i
35	2فأكثر	5	3-2	1
30	3فأكثر	8	4-3	2
22	4فأكثر	12	5-4	3
10	5فأكثر	6	6-5	4
4	6فأكثر	4	7-6	5
		35		**مج**

جدول3-8

ويكون الرسم المطلوب كما يلي :



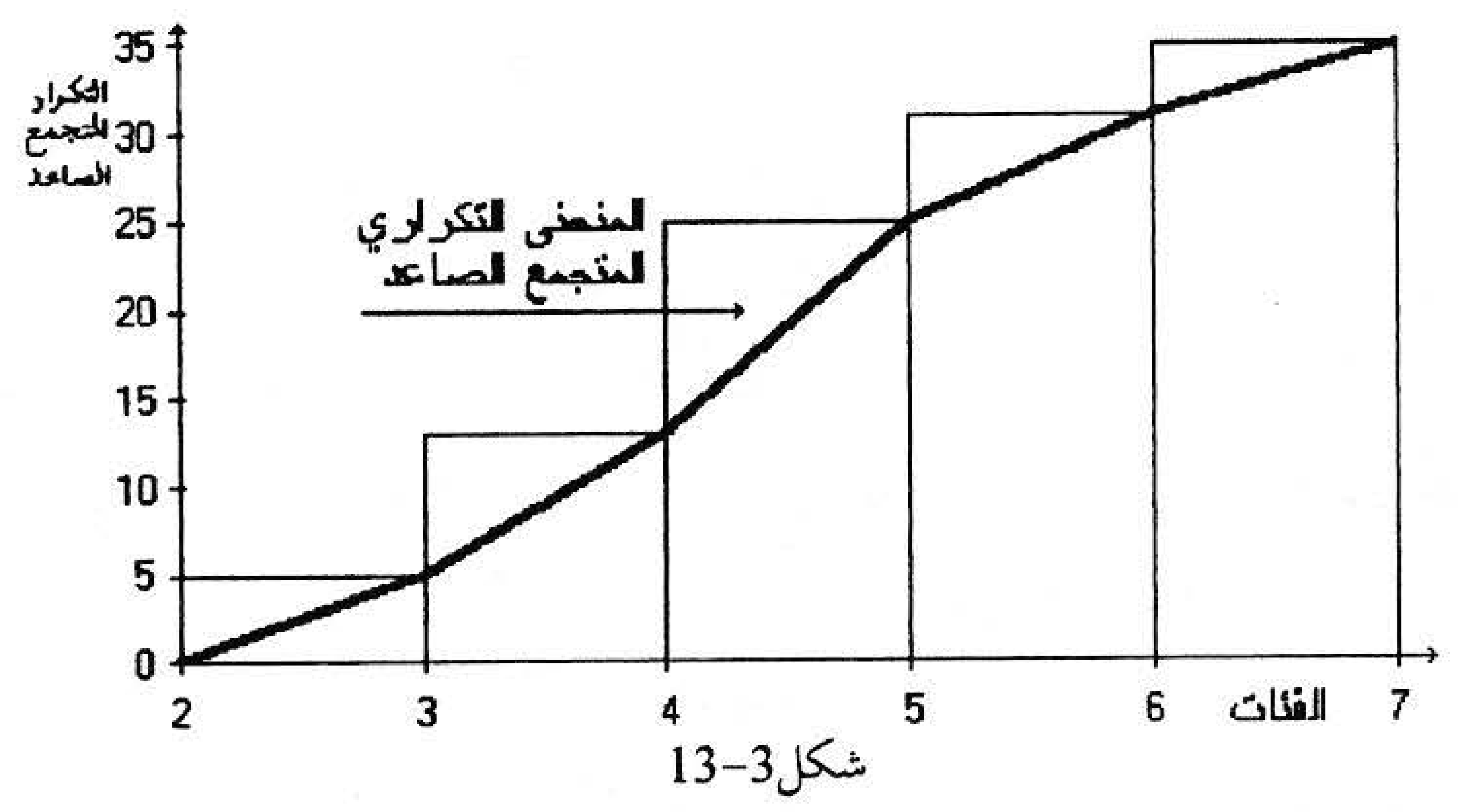
شكل3-12

6 -**المنحنى التكراري المتجمع** : و قد يكون أيضا إما متجمعا صاعدا، أومتجمعا نازلا :

***المنحنى التكراري المتجمع الصاعد** : ويتم رسمه انطلاقا من المدرج التكراري المتجمع الصاعد، وذلك بالوصل بين النقاط التي تمثل الحدود العليا للفئات والتكرارات المقابلة لها في المدرج التكراري المتجمع الصاعد، كما هو واضح في المثال أدناه.

مثال3-9: ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لبيانات المثال 3-8.

بتطبيق مبدأ الرسم المشار اليه أعلاه نحصل على الشكل المطلوب :



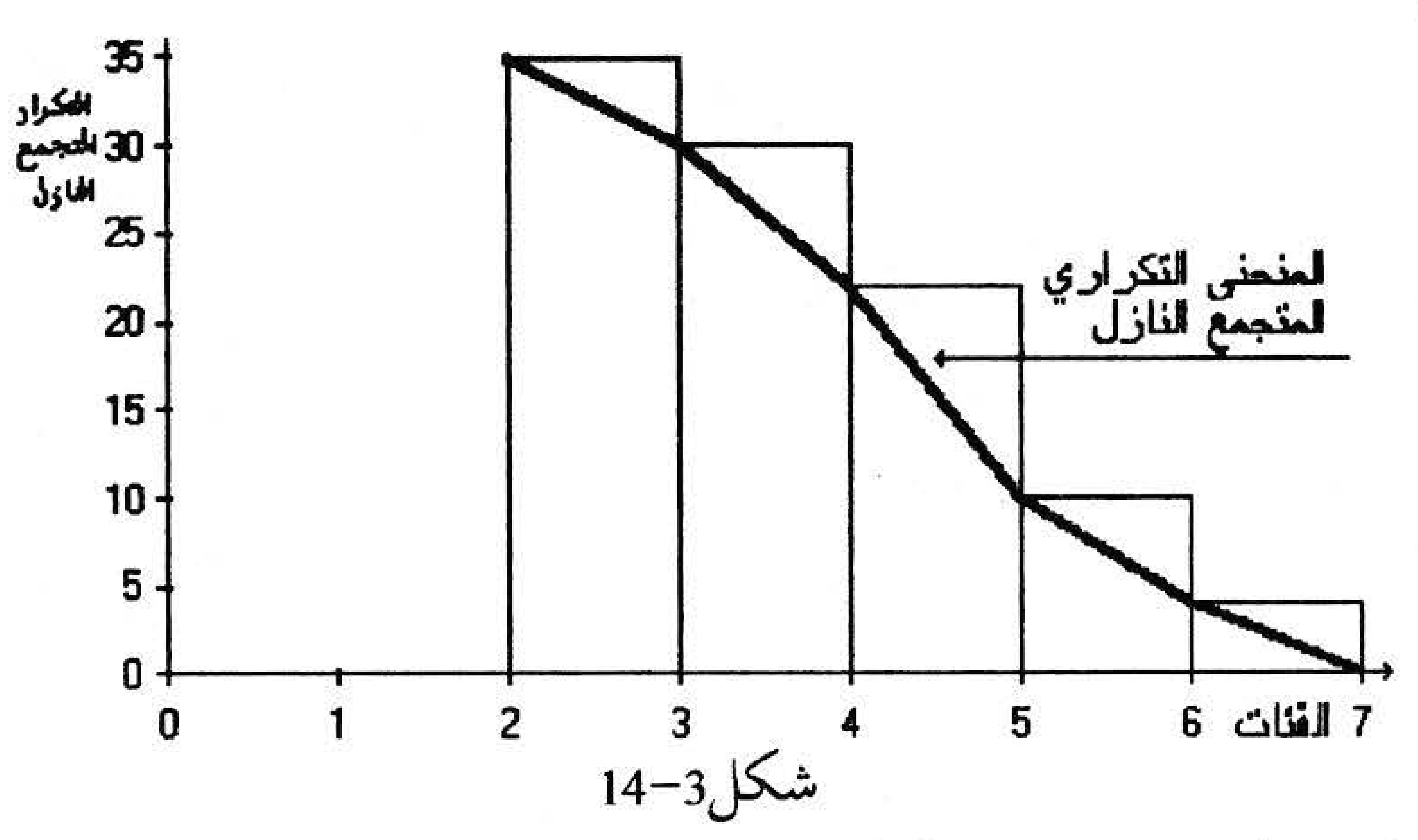
شكل3-13

* **المنحنى التكراري المتجمع النازل** : ويتم رسمه إنطلاقا من المدرج التكراري المتجمع النازل، حيث يتم الوصل بين النقاط التي تمثل لها الحدود الدنيا للفئات والتكرارات المتجمعة المقابلة لها، كما هو واضح في المثال التالي :

مثال3-10:ارسم المنحنى التكراري المتجمع النازل لبيانات المثال 3-8.

بتطبيق مبدأ الرسم المشار اليه أعلاه نحصل على الشكل المطلوب.





شكل3-14

ملاحظة : يمكن تقديم كل الأشكال التكرارية حسب الترتيب الذي سقناه، عن طريق الرسومات التكرارية النسبية (المائوية)، وذلك باستبدال التكرارات المطلقة على المحاور العمودية بالتكرارات النسبية (المائوية).

ثالثا: المنحنيات الزمنية : وهي المنحنيات التي تظهر تطور ظاهرة ما عبر الزمن، سواء كان مقاسا بالأيام أو بالسنوات أو بأجزائهما أوأضعافهما، في هذه الحالة يتم رسم معلم متعامد، يوضع على محوره الأفقي الزمن وعلى محوره العمودي قيمة الظاهرة، ثم تحدد نقاط التوفيقات المختلفة بين الزمن وقيمة الظاهرة، ليوصل بينها، فنحصل بذلك على المنحنى المطلوب.

مثال3-11: البيانات التالية تظهر تطور الواردات السلعية خلال الفترة:1990 -1997، بملايير الدينارات. المطلوب تقديمها في شكل بياني مناسب.

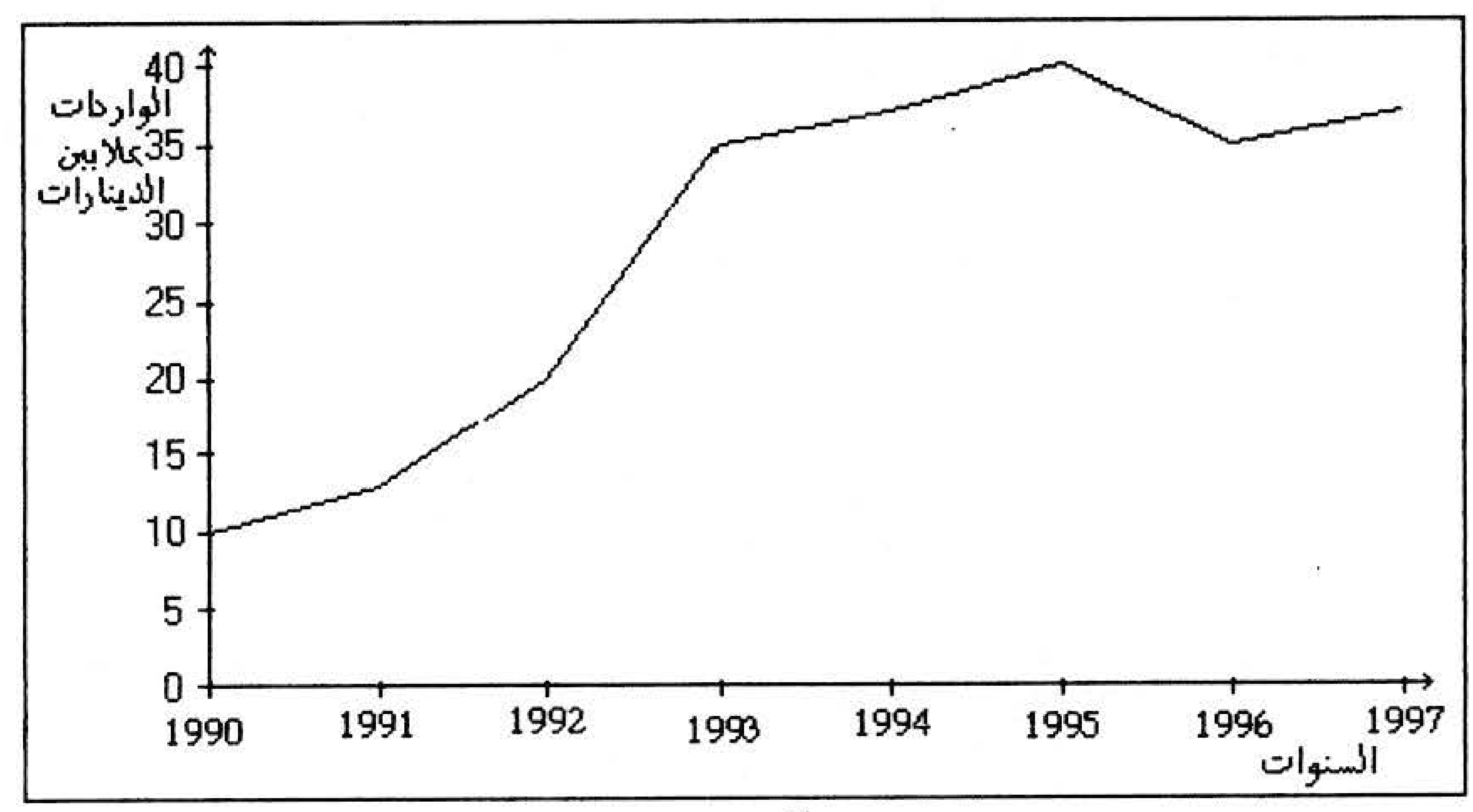
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
الواردات	10	13	20	35	37	40	35	37

جدول3-9



يتم تقديم البيانات المشار إليها كما يلي :

تطور الواردات السلعية خلال الفترة : 90-1997



شكل3-15

رابعا:الشكل الدائري: يستخدم الشكل الدائري في غالب الأحيان، لتقديم بيانات ظاهرة ما، تتركب من مكونات جزئية خلال ظرف زماني أو مكاني محددين، كتوزيع كميات التساقط حسب الفصول في سنة ما، أو توزيع مساحة مزرعة ما حسب أنواع المزروعات... الخ، و تقديم البيانات عن طريق الشكل الدائري، يتم عن طريق النسبة الزاوية، حيث أن القيمة الكلية للظاهرة، تقابل الزاوية الكلية للدائرة أي 360°، بينما القيم الجزئية للظاهرة تقابل أجزاء معينة من الزاوية الكلية للدائرة، يتم حسابها بإستخدام القاعدة الثلاثية وذلك كما يلي :

القيمة الكلية للظاهرة ⟵ 360°

القيمة الجزئية للظاهرة ⟵ x°

ومنه تكون الزاوية التى تقابل القيمة الجزئية للظاهرة كما يلي :

$$x^{\circ} = \frac{\text{القيمة الجزئية من الظاهرة}}{\text{القيمة الكلية للظاهرة}} \times 360 \qquad 15-3$$



مثال3-12: الجدول التالي يظهر المساحة المزروعة، حسب أنواع المزروعات في مستثمرة فلاحية مساحتها 1000 هكتار، خلال الموسم الفلاحي 1994، والمطلوب تقديمها عن طريق الشكل الدائري.

المزروعات	المساحة (هكتار)
حبوب	350
خضر	150
فواكه	200
م.أخرى	300

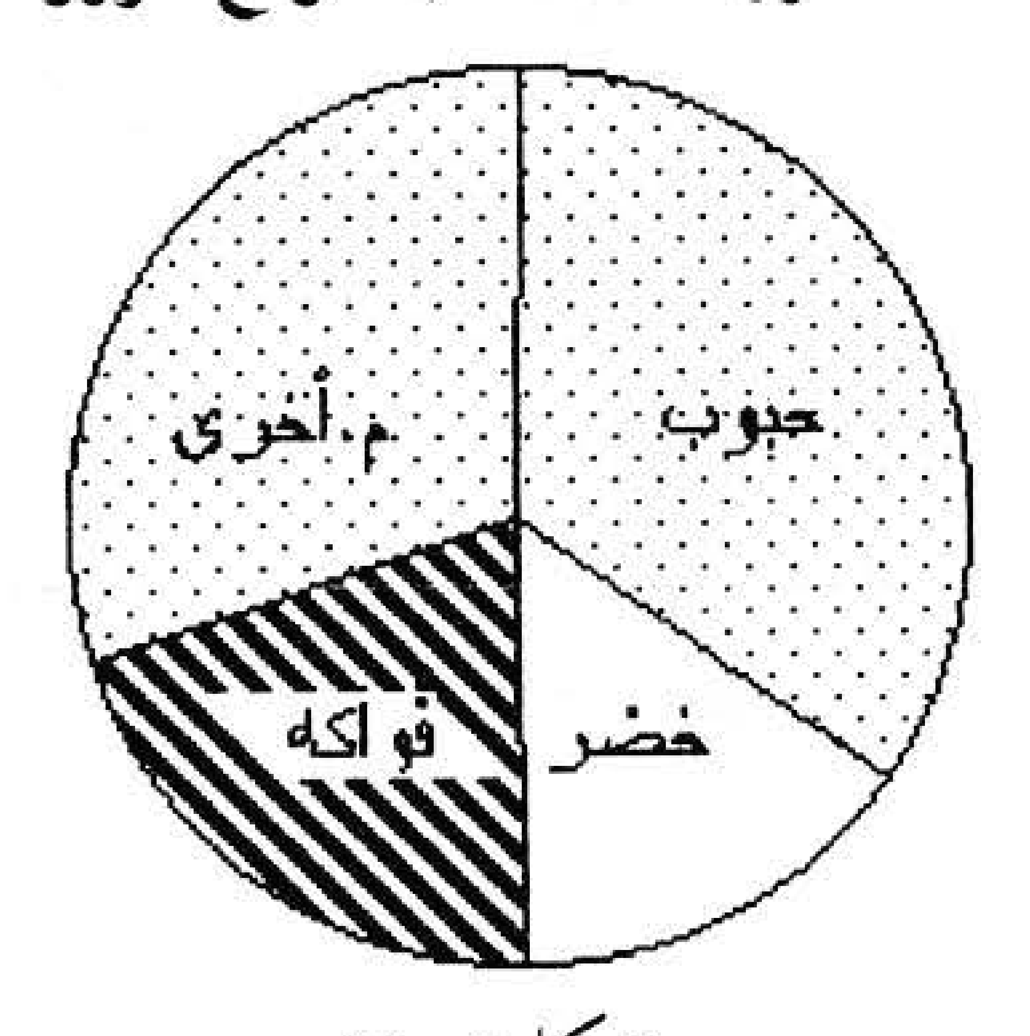
جدول3-10

لرسم الشكل الدائري، نقوم بحساب الزوايا التي تقابل كل قيمة جزئية، باستخدام القاعدة 3-15 أعلاه حيث نجد:

المزروعات	المساحة	الزاوية المقابلة بالدرجات
حبوب	350	126
خضر	150	54
فواكه	200	72
م.أخرى	300	108
المجموع	**1000**	**360**

و بالتالي الشكل المطلوب هو:

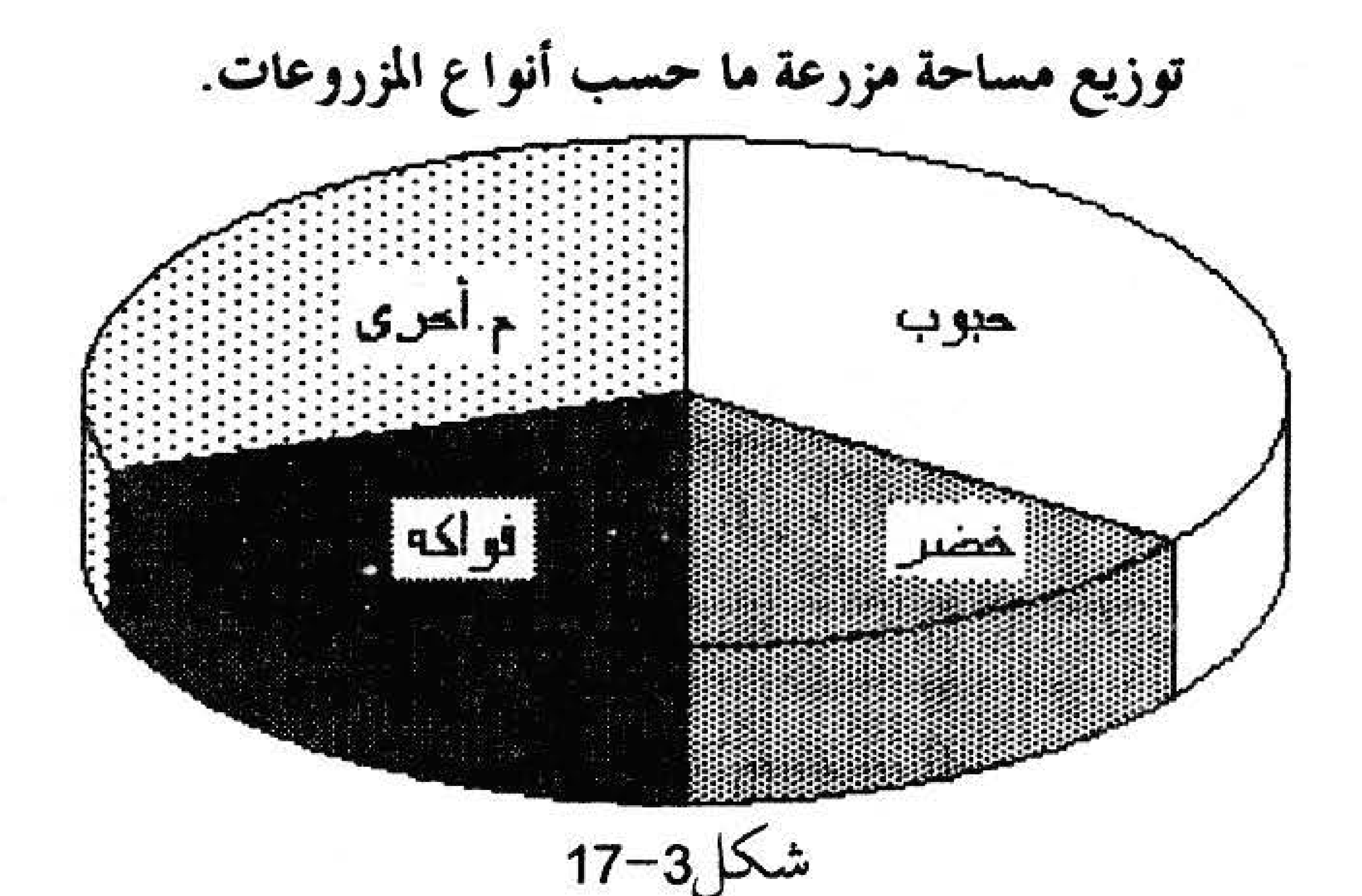
توزيع مساحة مزرعة ما حسب أنواع المزروعات.



شكل3-16

ويمكن وضع الدائرة أيضا بشكل أفقي (أسطواني) على النحو:

توزيع مساحة مزرعة ما حسب أنواع المزروعات.



شكل3-17

كما يمكن تقديم البيانات من هذا النوع أيضا عن طريق الشكل النصف دائري (على أساس 180°) أو الربع دائري (على أساس 90°).

خامسا: الشكل المستطيل: تقدم من خلاله البيانات المشابهة لتلك التي تقدم عن طريق الشكل الدائري، وفيه يجب أن تقابل القيمة الكلية للظاهرة المساحة الكلية للمستطيل المعد للرسم، و القيمة الجزئية للظاهرة، جزء من مساحة ذلك المستطيل، ويتم إيجادها عن طريق القاعدة الثلاثية كما يلي :

المساحة الكلية للمستطيل ⟵ القيمة الكلية للظاهرة

x ⟵ القيمة الجزئية للظاهرة

ومنه نجد:

$$x = \text{المساحة الكلية للمستطيل} \times \frac{\text{القيمة الجزئية من الظاهرة}}{\text{القيمة الكلية للظاهرة}}$$

16-3

حيث : x : جزء من مساحة المستطيل.

لتسهيل الرسم ينصح أن يكون عرض المستطيل وحدة قياس واحدة، ليعتمد الرسم بذلك على طول المستطيل فقط.

مثال3-13: قدم بيانات المثال3-12 عن طريق الشكل المستطيل.



إذا فرضنا أن المساحة الكلية للمستطيل الذي نريد أن نقدم البيانات من خلاله هي: 10سم2، فإنه يفضل أن يكون عرضه 1 سم وطوله 10سم، وتجرى الحسابات بصفة مشابهة لما يلي :

1000 هكتار تقابل 10سم^2

350هكتار (حبوب) تقابل x سم^2

ومنه نجد أن المساحة المقابلة 350 هكتارمن الحبوب، في مساحة المستطيل هي:

$$x = \frac{350}{1000} \times 10 = 3.5 \text{ سم}^2$$

وبالمثل نجد المساحة التي تقابل بقية أنواع المزروعات ضمن مساحة المستطيل، بتطبيق المعادلة 3-15 و هي:

المزروعات	المساحة (هكتار)	المساحة المقابلة على المستطيل سم^2
حبوب	350	3.5
خضر	150	1.5
فواكه	200	2.0
م.أخرى	300	3.0
المجموع	**1000**	**10**

و بالتالي يكون الشكل المطلوب كما يلي :

1سم

حبوب | خضر | فواكه | م.أخرى

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

شكل3-18

وتجدر الإشارة الى أنه يمكن تقديم البيانات التي تعطى على نفس منوال المثال3-11 أعلاه، عن طريق الشكل المربع أيضا.

سادسا: الشكل القطبي: يستخدم هذا النوع من الأشكال عندما تكون البيانات الإحصائية خاصة بمواسم معينة أو أشهر خلال سنوات قليلة، ويتم ذلك حسب المثال التالي :

مثال3-14: البيانات التالية تظهر تطور استهلاك مادة السكر في إحدى الولايات بآلاف الأطنان خلال أشهر سنتي 2001 و 2002.

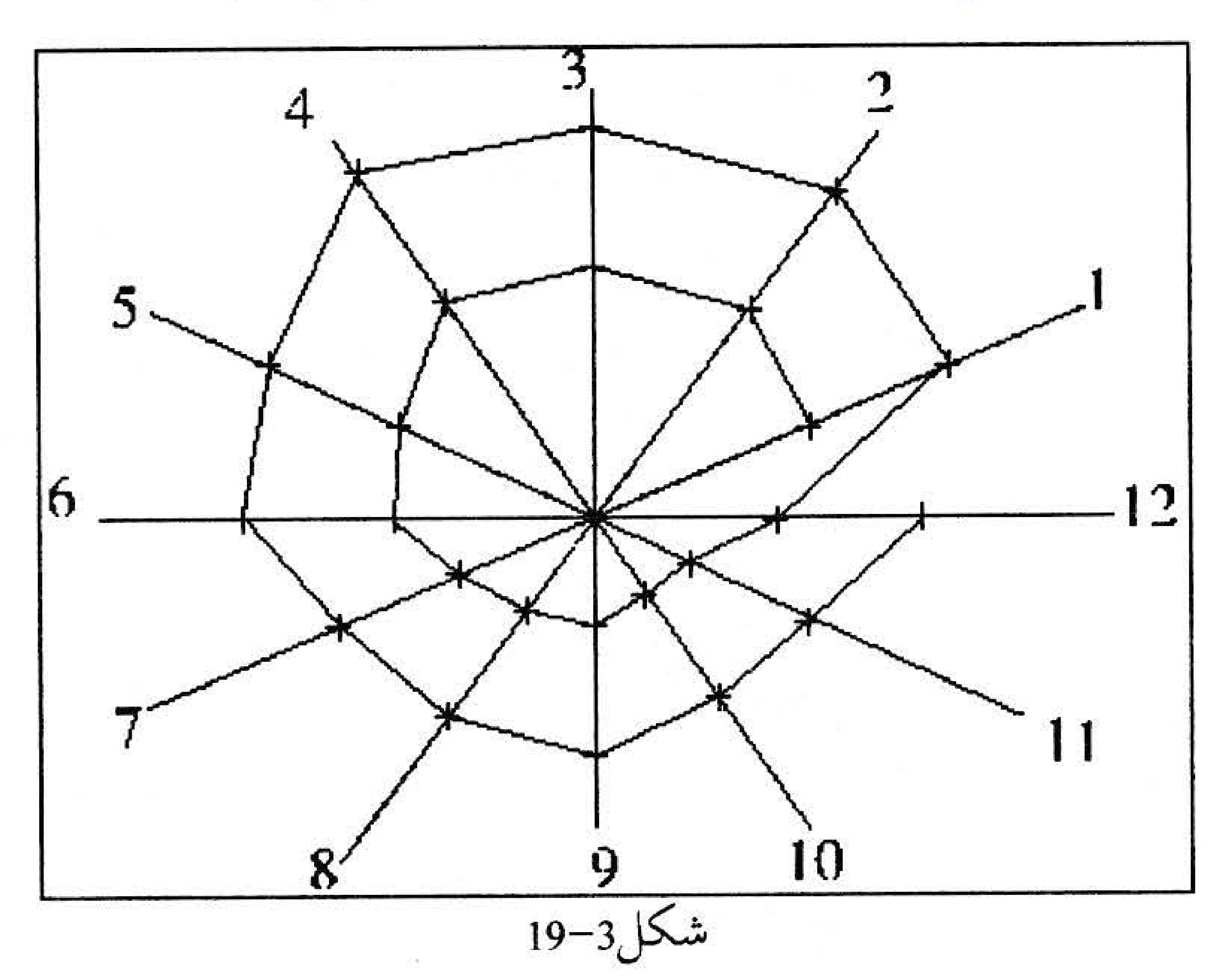
سنة\شهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2001	20	22	23	24	22	20	19	18	18	16	16	18
2002	23	25	26	27	25	22	22	21	21	19	19	21

جدول 3-11

المطلوب : قدم هذه البيانات عن طريق الشكل القطبي.

الإجابة : نقسم مستوى الإحداثيين الى 12 قسم متساوي، موصولة بنقطة الأصل بمستقيم كما هو واضح في الشكل 3-19، نعطي كل مستقيم رقم يدل على الشهر، ثم نختار وحدة قياس معينة، ونعين النقاط الموافقة لكل شهر على هذه المستقيمات ونصل بينها بخطوط في اتجاه عكس عقارب الساعة فنحصل بذلك على شكل يمثل البيانات كما هو أدناه:





شكل3−19

سابعا:الطريقة التصويرية: في هذه الطريقة يتم رسم عنصر الظاهرة بذاته، ليدل على عدد معين من عناصر تلك الظاهرة، فاذا كانت الظاهرة تتعلق بالأشجار المثمرة مثلا، يتم رسم شجرة برتقال، أو شجرة تفاح، بحيث كل شجرة تمثل 1000 وحدة من الأشجار.

هذه هي أهم الأشكال البيانية التي تقدم عن طريقها البيانات الإحصائية، حسب طبيعتها، وهناك أشكال أخرى، غير أنها نادرة الإستعمال، إما لأن رسمها يتطلب حسابات معقدة نوعا ما، أو لأن فهمها يكون صعبا. وكما سبقت الإشارة فإنه لتقديم أية بيانات عن طريق الرسومات، فانه لابد من مراعاة قواعد الرسم، و الخواص الإحصائية المعروضة في بداية هذا البند.

و بتقدم البرامج المعلوماتية، فإن هناك الكثير من برامج الإعلام الآتي التي يمكن إستخدامها في تقديم البيانات الإحصائية، إذ يكتفي الباحث بإدخال المعلومات، و يختار شكلا من عشرات الأشكال المصممة، ليحصل على الشكل الذي يرغب فيه.

تمـــاريـــن

تمرين1: من التمرين الأول لسلسلة الفصل الثاني أجب:

1- ماهي الأشكال البيانية التي يمكن أن تقدم عن طريقها البيانات المحصل عليها بعد التبويب؟.

2- قدم البيانات المحصل عليها بكل الأشكال المناسبة.

تمرين2: قدم النتائج المتوصل اليها من تبويب بيانات التمرين الثاني سلسلة تمارين الفصل الثاني بكل الأشكال البيانية الممكنة.

تمرين3: ارسم المضلع التكراري و المضلع التكراري المائوي والمنحنيين المتجمعين، الصاعد والنازل للبيانات المحصل عليها من التمرين الثالث سلسلة تمارين الفصل الثاني.

تمرين4: البيانات التالية تظهر تطور سكان الجزائر خلال الفترة: 76-1986، بالملايين.

مصادر متعددة أساسها الديوان الوطني للإحصائيات

السنة	1976	1977	1978	1979	1980	1981
عدد السكان	16.3	17.1	17.7	18.1	18.7	19.2
السنة	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد السكان	19.9	20.5	21.2	21.9	22.5	23.2
السنة	1988	1989	1990	1991	1992	1993
عدد السكان	23.8	24.4	25.0	25.6	26.3	26.9
السنة	1994	1995	1996	1997	1998	1999
عدد السكان	27.4	28.0	28.6	29.0	29.5	30.0
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005
عدد السكان	30.4	30.8	31.2	31.6	32.1	

المطلوب: 1- أكمل الإحصائيات من مصادر الديوان الوطني للإحصائيات لغاية السنة التي نحن فيها.

2- قدم هذه البيانات بكل الأشكال البيانية الممكنة.

تمرين5: البيانات التالية تظهر مساحات المحيطات بملايين الكيلومترات المربعة.

المحيط	الهادي	الأطلنطي	الهندي	م.الجنوبي	م.الشمالي
المساحة	183.4	106.7	73.8	19.7	12.4

المطلوب: قدم هذه البيانات بكل الأشكال البيانية الممكنة.

تمرين6: البيانات التالية تظهر تطور عدد الناجحين في إمتحانات شهادة التعليم الأساسي حسب الجنس خلال الفترة 1998-2000 في الجزائر.

المصدر: الجزائر بالأرقام رقم 31. الديوان الوطني للإحصائيات. www.ons.dz

الجنس	جوان 1998	جوان 1999	جوان 2000
ذكور	105102	87767	110384
إناث	129077	106464	133221

المطلوب: 1- أوجد عدد الممتحنين في كل سنة

2- أوجد نسبة النجاح حسب الجنس. ماذا تستنتج.

3- قدم البيانات الأصلية و المحسوبة في السؤالين1 و2 بكل الأشكال البيانية الممكنة.

تمرين7: البيانات التالية تظهر عدد المسجلين و الناجحين في شهادة البكالوريا لدورة جوان 2000 حسب الجنس في الجزائر.

المصدر: الجزائر بالأرقام رقم 31. الديوان الوطني للإحصائيات. www.ons.dz

	ذكور	إناث	المجموع
المسجلون	195147	250321	445486
الناجحون	49133	70192	119325

المطلوب: 1- أوجد نسبة النجاح من المجموع لكل فئة. ماذا تستنتج. حلل.

2- أوجد نسب النجاح حسب الجنس، ماذا تستنتج؟

3- قدم البيانات الأصلية و البيانات المحسوبة في السؤال 1 و2 بكل الأشكال البيانية الممكنة.



تمرين8: من التمرين رقم 5 في سلسلة تمارين الفصل السابق:

1- إرسم الهرم السكاني للبيانات الخاصة بتوزيع السكان حسب فئات الأعمار لسنة 2000 ، في حالة L=5 ثم في حالة L=10 .

2- أجب على نفس السؤال 1 بالنسبة للبيانات الخاصة بتوزيع السكان حسب فئات الأعمار لسنة 1993 في حالة L=5 ثم في حالة L=10 .

3- قارن بين الهرمين. ماذا تستنتج.

تمرين9: من بيانات التمرين 4 سلسلة تمارين الفصل الثاني قم بما يلي:

1- قدم مساحة الوطن العربي بالشكل البياني المناسب.

2- أوجد الكثافة السكانية لكل دولة و قدمها بالأشكال البيانية المناسبة.

3-قدم مساحة دول المغرب العربي بالشكل الدائري، النصف دائري، المستطيل، الأعمدة التكرارية.

4- نفس السؤال بالنسبة لدول الخليج العربي، و لدول الساحل الغربي للبحر الأحمر.




economicrg
groups/economicrg
economicrg.blogspot.com
بوابة
الباحث الإقتصـــادي
Economic Researcher Gate

الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية.

بعد جمع البيانات الاحصائية حول الظاهرة المدروسة، ينتقل الاحصائي الى دراستها وتحليلها وإستخلاص النتائج، ولأجل ذلك يكون من بين أولى إهتماماته بحث مدى تمركز القيم التي جمعها حول قيمة ما ضمن مجموعة البيانات الاحصائية، وبمعنى آخر بحث مدى نزوع مختلف قيم الظاهرة حول قيمة مركزية منها، ويتم ذلك عن طريق أدوات تحليلية، سميت لأجل ذلك بمقاييس النزعة المركزية، وهي:

1-الوسط الحسابي. 4-الوسط التربيعي.

2-الوسيط. 5-الوسط الهندسي.

3-المنوال. 6-الوسط التوافقي.

يهدف هذا الفصل الى تبيان أهمية هذه المقاييس في التحليل الإحصائي، وكيفية حسابها، مع إبراز خصائصها والعلاقة فيما بينها، وقبل الشروع في ذلك نصطلح على ما يلي:

1-بيانات غير مبوبة : هي البيانات غير المرتبة في شكل جداول تكراررية.

2- بيانات مبوبة طول فئاتها معدوم : هي البيانات المرتبة في شكل جداول تكرارية غير مستمرة، أي طول فئاتها معدوم (L =0)

3- بيانات مبوبة مدى فئاتها أكبر من الصفر : هي البيانات المرتبة في شكل جداول تكرارية مستمرة، أي طول فئاتها أكبر من الصفر (L>0).

قبل الشروع في تقديم مختلف مقاييس النزعة المركزية نشير الى أن أية قيمة مركزية تكون مثلى إذا توافرت فيها شروط يول**Yule** التالية:



- أن تؤخذ هذه القيمة دون تحيز من طرف الباحث.
- أن تحسب اعتمادا على جميع معطيات السلسلة الإحصائية.
- أن يكون لها معنى مادي.
- أن تكون سهلة الحساب.
- أن لا تتأثر كثيرا بتغيرات العينة أو المجتمع.
- أن تكون قابلة لإجراء الحسابات الجبرية عليها.

أولا: الوسط الحسابي : الوسط الحسابي لأية مجموعة من القيم هو معدلها بالتعبير العام، وتختلف طريقة حسابه حسب طبيعة البيانات كما هي موضحة أعلاه.

1- الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

تعريف4-1: إذا كانت لدينا القيم: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$، فإن الوسط الحسابي لها يعطى بالمعادلة التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n}{N} \qquad 1-4$$

ويكتب إختصارا كمايلي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \qquad 2-4$$

حيث : $i = 1, 2, 3 \ldots N$ (N : هو عدد القيم)

ويعني هذا أن الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة يساوي الى مجموع البيانات مقسوما على عددها.

مثال4-1: حصل طالب على النتائج التالية في 10 مقاييس :

10 15 12 13 12 10 12 14 13 12

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه النتائج.

الجواب : بتطبيق المعادلة 4-1 أو 4-2، يكون :

$$\bar{x} = \frac{10+15+12+13+12+10+12+14+13+12}{10} = 12.3$$

إذن الوسط الحسابي لنتائج الطالب، أي معدله هو :12.3



2- الوسط الحسابي للبيانات المبوبة : كماسبق وأن رأينا في الفصل الثاني فإن البيانات ذات الصفات الكمية المبوبة تكون على نوعين، اما مدى فئاتها معدوم أي : $L = 0$، أومدى فئاتها أكبر من الصفر أي : $L > 0$

1-الوسط الحسابي للبيانات المبوبة التي مدى فئاتها معدوم : في هذه الحالة، بدل جمع القيمة الواحدة x_i عدة مرات حسب موضعها بين القيم، فانه يتم ضربها في عدد تكراراتها التي نرمز لها بـ f_i وجمع النواتج وقسمتها على مجموع التكرارات، لأن التكرار يعبر عن عدد مرات تكرار القيمة x_i ضمن مجموعة القيم، وتكون بذلك كل قيمة مرجحة بتكرارها، لذلك يسمى الوسط الحسابي في هذه الحالة أحيانا **بالوسط الحسابي المرجح**.

تعريف4-2: إذا كانت لدينا البيانات : $x_i, x_2, x_3 ..... x_n$

تكراراتها على التوالي : $f_i, f_2, f_3 ..... f_n$

فإن وسطها الحسابي يعطى بالصيغة التالية :

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n} \qquad 3-4$$

وإختصارا يكتب بالعبارة التالية :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 4-4$$

حيث:$i=1,2,3....n$ (n : عدد الفئات).

مثال4-2: بوب بيانات المثال 4-1 في جدول تكراري غير مستمر(طول فئاته $L = 0$:)، ثم أوجد الوسط الحسابي من الجدول المحصل عليه، وقارنه بالوسط الحسابي للبيانات الأصلية كما وردت في المثال 4-1.



بتطبيق قواعد التبويب كما وردت في الفصل الثاني نحصل على الجدول التالي:

f_i	x_i	i
2	10	1
4	12	2
2	13	3
1	14	4
1	15	5
10	**/**	**مج**

جدول4-1

لإيجاد الوسط الحسابي لبيانات الجدول المحصل عليه، نطبق المعادلة رقم 4-3 أو4-4، ولأجل ذلك نضيف عمودا الى الجدول السابق، لحساب جداءات القيم في تكراراتها، أي: x_i f_i ، كما هو واضح في الجدول 4-2 أدناه، ثم نجمع النواتج، ونقسمها على مجموع التكرارات.

$x_i f_i$	f_i	x_i	i
20	2	10	1
48	4	12	2
26	2	13	3
14	1	14	4
15	1	15	5
123	**10**	**/**	**مج**

جدول4-2

من الجدول4-2، نجد أن : $\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 123$ و $\sum_{i=1}^{5} f_i = 10$

وبتطبيق المعادلة رقم :4-4 يكون : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{123}{10} = 12.3$

وهي نفس النتيجة المحصل عليها في المثال 4-1.

ب- الوسط الحسابي للبيانات المبوبة التي طول فئاتها أكبر من الصفر: في هذه الحالة يستحيل ايجاد الوسط الحسابي الحقيقي، كما في حالة البيانات غير المبوبة أو



البيانات المبوبة التي مدى فئاتها معدوم، لأن مدى الفئات قد لايكون متساو بالنسبة لجميع الفئات، كما أن توزيع القيم داخل هذا المجال قد يكون غير متماثل، لذلك يتم ايجاد وسط تقريبي بالإعتماد على مراكز الفئات التي سوف نرمز لها بـ c_i، وذلك باستخدام القاعدة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 5-4$$

حيث : c_i مركز الفئة i (أنظر المعادلة 3-4)

مثال4-3: البيانات التالية تمثل الأجور الأسبوعية التي يتقاضاها عمال أحد المصانع بآلاف الدينارات:

18	19	15	14	10	12	11	10
24	21	23	20	17	16	15	15
27	25	22	24	23	20	24	23
25	29	28	27	25	25	29	28
32	31	30	26	27	25	27	28
34	32	34	30	30	33	34	33

المطلوب:

1-أوجد الوسط الحسابي للأجور.

2-بوب البيانات أعلاه في جدول تكراري مستمر طول فئاته: $L=5.10^3$ دينار.

3- من البيانات المحصل عليها من السؤال 2 أوجد الوسط الحسابي وقارنه بالوسط المحصل عليه من السؤال 1.

الإجابة:

1- إيجاد الوسط الحسابي : يعطى الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة بالمعادلة 4-2، أي:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

مجموع القيم هو : 1150، بينما عدد القيم هو : 48 ومنه نجد:

$$\bar{x} = \frac{1150}{48} = 23.95$$

و يعني هذا أن متوسط أجور العمال هو : 23.95. 10^3 دينار.

2- تبويب البيانات في جدول تكراري طول فئاته 5. 10^3 دينار:

باستخدام مباديء التبويب الواردة في الفصل الثاني نحصل على التوزيع التالي :

i	الفئات	f_i
1	10-15	5
2	15-20	7
3	20-25	10
4	25-30	15
5	30-35	11
مج		**48**

جدول4-3

3-ايجاد الوسط الحسابي لبيانات الجدول4-3 المحصل عليه بعد التبويب: التوزيع الجديد هو توزيع تكراري مستمر لذلك يتم تطبيق العلاقة 4-5 لايجاد الوسط الحسابي وهي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} c_i f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}$$



ولأجل تطبيق هذه العلاقـــة تتـــم اضافـــة عموديـــن للجـــدول الســـابقْ أحدهما نحســـب فيـــه مراكـــز الفئـــات والآخـــر نحســـب فيـــه مراكـــز الفئات مضروبة في التكـــرارات، وهـــو مـــا يوضحـــه الجـــدول 4-4.

i	الفئات	f_i	C_i	C_if_i
1	10-15	5	12.5	62.5
2	15-20	7	17.5	122.5
3	20-25	10	22.5	225.0
4	25-30	15	27.5	412.5
5	30-35	11	32.5	357.5
مج		**48**		**1180.0**

جدول 4-4

من الجدول نستنتج أن قيمة بسط المعادلة المشار اليها هـــو :1180، ومقامـــها هو: 48 ومنه يكون :

$$\bar{x} = \frac{1180.0}{48} = 24.58$$

أي أن الوسط الحسابي للبيانات الجديدة هو: 24.58 . 10^3 دينار.

واضح تماما بأن الوســـط الحســـابي للبيانـــات قبـــل وضعـــها في جـــدول مســـتمر، يختلـــف قليـــلا عنـــها لمـــا وضعـــت في جـــدول تكـــراري مستمر، لأنه في الحالة الأخـــيرة يعتمـــد الوســـط الحســـابي فقـــط علـــى الحدود العليا والدنيا للفئات وليس علـــى جميـــع القيـــم الأصليـــة.

3- خـــواص الوســـط الحســـابي : يتمـــيز الوســـط الحســـابي بمجموعة مـــن الخـــواص تجعلـــه أفضـــل مقيـــاس مـــن مقـــاييس النزعـــة المركزية، في المعالجة الاحصائية، منـــــها مـــا يلـــي :

أ-الخاصيـــة الأولـــى : المجمـــوع الجـــبري لفروقـــات القيـــم عـــن وسطها الحسابي، يكـــون دائمـــا معدومـــا.

ففي حالة البيانات غير المبوبة يكون :



$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0 \qquad 6-4$$

أما في حالة البيانات المبوبة فيكون :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})f_i=0 \qquad 7-4$$

الاثبات : يتم إثبات هذه الخاصية رياضيا و حسابيا كما يلي:

*** الإثبات الرياضي :**

**** حالة البيانات غير المبوبة** : بنشر المعادلة رقم 4-6، نحصل على مايلي:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+...+(x_n-\bar{x})$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-N\bar{x} \qquad 8-4$$

ومعلوم لدينا أن الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة يعطى كما يلي:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{N}$$

بضرب طرفي العلاقة في وسطيها نجد :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=N\bar{x} \qquad 9-4$$

بتعويض العلاقة 4-9 في العلاقة 4-8 نجد :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=N\bar{x}-N\bar{x}=0$$

و بالتالي فان الخاصية صحيحة في حالة البيانات غير المبوبة.

****حالة البيانات المبوبة :**



بنشر المعادلـــة 4-7 نجـــد :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})f_i=(x_1-\bar{x})f_1+(x_2-\bar{x})f_2+(x_3-\bar{x})f_3+\ldots+(x_n-\bar{x})f_n$$

أي: 4-10

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})f_i=\sum_{i=1}^{n}x_if_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}f_i$$

معلوم لدينا أن الوسط الحسابي للبيانات المبوبة التي طول فـئاتها معدوم هو:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد :

$$\bar{x}\sum_{i=1}^{n}f_i=\sum_{i=1}^{n}x_if_i \qquad 4-11$$

بتعويـــض 4-11 في 4-10 نجـــد :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})f_i=\bar{x}\sum_{i=1}^{n}f_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}f_i=0$$

وبالتالي فان الخاصية أيضا صحيحـــة في حالـــة البيانـــات المبوبـــة.

***الاثبـات الحسـابي** : ويتـــم عـــن طريـــق المثـــالين 4-4 و 4-5 التـــاليين :

مثال 4-4 : من بيانات المثال رقم 4-1، اثبت صحـــة المعادلـــة رقـــم 4-6 حسابيا.

الاثبات : البيانات المشـــار اليـــها هـــي :

10 15 12 13 12 10 12 14 13 12

وسطها الحسابي هـــو:

$$\bar{x}=\frac{123}{10}=12.3$$

بتطبيق العلاقة 4-6 المشار اليها أعلاه من خلال الجدول التالي، نجد بالفعل أن مجموع الإنحرافات (الفروقات) عن الوسط الحسابي معدوم، وذلك ما يوضحه الجدول 4-5.

x_i	10	15	12	13	12	10	12	14	13	12	مج
x_i-12.3	-2.3	2.7	-0.3	0.7	-0.3	-2.3	-0.3	1.7	0.7	-0.3	0.0

جدول 4-5

من السطر الأخير في الجدول يظهر أن مجموع الإنحرافات عن الوسط الحسابي معدوم.

مثال 4-5 :اثبت صحة العلاقة رقم 4-7 من خلال بيانات الجدول 4-1.

الإجابة : الوسط الحسابي للبيانات المشار اليها هو :

$$\bar{x} = \frac{123}{10} = 12.3$$

بتطبيق العلاقة 4-7 المشار اليها نجدها صحيحة وذلك من خلال الجدول التالي :

i	x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})f_i$
1	10	2	-2.3	-4.6
2	12	4	-0.3	-1.2
3	13	2	0.7	1.4
4	14	1	1.7	1.7
5	15	1	2.7	2.7
مج	/	**10**		**0.0**

جدول4-6

اذ أن مجموع عناصر العمود الآخير تساوي الصفر أي :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})f_i = 0$$

ب-الخاصية الثانية : إذا كانت لدينا مجموعة من القيم وسطها الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$ في حالة البيانات غير المبوبة



أو : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ في حالة البيانات المبوبة

وأضيفت قيمة ثابتة c الى كل قيمة من القيم الأصلية، فإن الوسط الحسابي للقيم الجديدة يساوي الى الوسط الحسابي للقيم الأصلية مضافا إليه القيمة الثابتة، أي :

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + c \qquad 12-4$$

حيث : $\bar{\bar{x}}$: الوسط الحسابي للقيم الجديدة.

هذه الخاصية صحيحة أيضا في حالة طرح المقدار c من القيم الأصلية، حيث أن الوسط الحسابي للقيم الجديدة يعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} - c \qquad 13-4$$

الاثبات :يتم اثبات هذه الخاصية أيضا اثباتا رياضيا واثباتا حسابيا كما يلي:

- **الاثبات الرياضي :**

** **حالة البيانات غير المبوبة** :إذا كانت لدينا البيانات : $x_1, x_2, x_3 \ldots x$

فان وسطها الحسابي هو: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$

عند إضافة القيمة الثابتة c الى كل قيمة من تلك القيم تصبح القيم الجديدة كما يلي:

$x_1+c \ , \ x_2+c \ , \ x_3+c \ , \ \ldots\ldots \ , \ x_n+c$

و يكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة هذه على النحو:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{x_1 + c + x_2 + c + x_3 + c + \ldots + x_n + c}{N} \qquad 14-4$$

وهو ما يمكن كتابته كما يلي :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + Nc}{N} \qquad 15-4$$

أو :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + c \qquad 16-4$$

ومعلوم أن القسم الأول في الطرف الأيمن هو الوسط الحسابي، للبيانات الأصلية، وبالتالي فالعلاقة رقم 4-12 صحيحة.

** **حالة البيانات المبوبة** :عند البرهان على هذه الخاصية يجب أخذ بعين الاعتبار تكرارات كل قيمة، فإذا كانت لدينا البيانات:

$x_1, x_2, x_3.....x_n$ تكراراتها على التوالي: $f_1, f_2, f_3.....f_n$ فإن وسطها الحسابي يعطى بالمعادلة 4-4، أي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

عند إضافة المقدار c الى كل قيمة من قيم هذه البيانات نحصل على الجدول التالي:

i	$x_i + c$	f_i
1	$x_1 + c$	f_1
2	$x_2 + c$	f_2
3	$x_3 + c$	f_3
. . .	. . .	. . .
N	$x_n + c$	f_n

جدول4-7

وطبعا يكون الوسط الحسابي لهذه البيانات على شكل المعادلة التالية :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + c)f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 17-4$$

بفك بسط المعادلـــة 4-17 نجــد :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i + c\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 18-4$$

ومنه نجد :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + c \qquad 19-4$$

معلــوم أن القســم الأول مــن الطــرف الأيمــن للمعادلــة 4-19 هـــو الوسط الحســـابي للبيانـــات الأصليـــة، ومنـــه فـــان الخاصيـــة صحيحـــة أيضا في حالة البيانـــات المبوبـــة.

**** الاثبات الحسابي** : يتم ذلـــك عـــن طريـــق المثـــالين التـــاليين :

مثـــال 4-6 : مـــن بيانـــات المثـــال 4-1 اثبـــــت أنـــــه إذا طـــــرح المقدار c=2 من كـــل قيمـــة مـــن القيـــم فـــان الوســـط الحســـابي للقيـــم الجديـــدة، يســـاوي الى الوســـط الحســـابي للقيـــم الأصليـــة وهـــو 12.3 منقوصا منه 2، أي الوســـط الحســـابي الجديـــد هـــو : 10.3.

بطرح المقدار C=2 من بيانات المثال المشار اليه نحصل على القيم التالية:

8 13 10 11 10 8 10 12 11 10

و يكون وسطها الحســـابي هـــو :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{103}{10} = 10.3$$

أي : $\bar{\bar{x}} = 12.3 - 2$ و بالتالي فإن الخاصية صحيحة.



مثال 4-7 : من بيانات الجدول 4-1، أثبت أنه إذا طرح المقدار c=2 من كل قيمة من القيم فإن الوسط الحسابي للقيم الأصلية يساوي الى : 12.3-2=10.2، أي الوسط الحساب للقيم الأصلية منقوصا منه:c=2:

الإجابة: عند طرح المقدار :c=2 من البيانات المشار اليها نحصل على بيانات العمود الرابع من الجدول 4-8، و بإجراء الحسابات من خلال الجزء الأيمن من الجدول 4-8 أدناه نجد :

i	x_i	f_i		(x_i-2)	$(x_i-2)f_i$
1	10	2		8	16
2	12	4		10	40
3	13	2		11	22
4	14	1		12	12
5	15	1		13	13
مج		**10**			**103**

جدول4-8

الوسط الحسابي للبيانات الجديدة هو :

$$\bar{x} = \frac{103}{10} = 10.3$$

أي :

$$\bar{x} = 12.3 - 2 = 10.3$$

وبالتالي فإن الخاصية صحيحة.

ج-الخاصية الثالثة :إذا كانت لدينا مجموعة من القيم وسطها الحسابي هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$ في حالة البيانات غير المبوبة

أو :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$ في حالة البيانات المبوبة

وضربت كل قيمة من تلك القيم في عدد ثابت وليكن :c، فإن الوسط الحسابي للقيم الجديدة، يساوي الى الوسط الحسابي للقيم الأصلية مضروبا في العدد c، أي:

$$\bar{\bar{x}} = c.\bar{x} \qquad 20-4$$

الاثبات : يتم إثبات الخاصية رياضيا وحسابيا كما يلي :

***الاثبات الرياضي** :

****حالة البيانات غير المبوبة** : إذا كانت مجموعة القيم هي: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ فإن وسطها الحسابي هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

بضرب هذه القيم في مقدار ثابت C ، نحصل على القيم الجديدة :

$$c.x_1 , c.x_2 , c.x_3, ... c.x_n$$

ويكون الوسط الحسابي لهذه القيم هو:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (c.x_i)}{N} \qquad 21-4$$

بإخراج C عامل مشترك، أي خارج المجموع، نحصل على المعادلة :

$$\bar{\bar{x}} = c.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \qquad 22-4$$



معلوم أن الطرف الأخير من المعادلة 4-22 هو الوسط الحسابي للقيم الأصلية، ومنه نستنتج أن العلاقة 4-20 صحيحة، وبالتالي فإن الخاصية صحيحة.

حالة البيانات المبوبة: لإثبات الخاصية في حالة البيانات المبوبة يجب أخذ التكرارات بعين الاعتبار، فإذا كانت لدينا البيانات :

$x_1 , x_2 , x_3, ..., x_n$ تكراراتها على التوالي:

$f_1 , f_2, f_3, ..., f_n$ فإن وسطها الحسابي هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

بضربها في المقدار c نحصل على البيانات الجديدة كما هي في الجدول التالي:

i	$c.x_i$	f_i
1	$c.x_1$	f_1
2	$c.x_2$	f_2
3	$c.x_3$	f_3
.	.	.
.	.	.
.	.	.
N	$c.x_n$	f_n

جدول4-9

و يكون الوسط الحسابي لهذه البيانات على النحو:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (c.x_i) f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

باخراج C عامل مشترك، أي خارج المجموع نجد :



$$\bar{\bar{x}} = c.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 23-4$$

الطرف الأخير من المعادلة 4-23 ، هو الوسط الحسابي، وبالتالي نستنتج أن العلاقة 4-20 صحيحة، أي أن الخاصية صحيحة أيضا في حالة البيانات المبوبة.

تتم البرهنة بنفس الطريقة في حالة قسمة البيانات الأصلية على عدد ثابت c، حيث يساوي الوسط الحسابي الجديد الى الوسط الحسابي للبيانات الأصلية مقسوما على العدد c.

* **الاثبات الحسابي**: يتم كذلك عن طريق المثالين التاليين :

مثال4-8: اثبت أنه إذا ضربت بيانات المثال 4-1 في المقدار2= c ، فإن الوسط الحسابي للبيانات الجديدة هو: $\bar{\bar{x}} = 2.\bar{x} = 2 \times 12.3 = 24.6$

بضرب البيانات المشار إليها في العدد 2= c ، نحصل على القيم التالية:

20 30 24 26 24 20 24 28 26 24

ويكون الوسط الحسابي لهذه البيانات هو: $\bar{\bar{x}} = \frac{246}{10} = 24.6$

أي أن الوسط الحسابي الجديد يساوي الى الوسط الحسابي للبيانات الأصلية مضروبا في :2= c

مثال 4-9: اثبت أنه إذا ضربت بيانات الجدول 4-1 في المقدار 2= c فإن الوسط الحسابي للبيانات الجديدة هو: $\bar{\bar{x}} = 2.\bar{x} = 2 \ . \ 12.3 = 24.6$

الإجابة: لإثبات ذلك نجري الحسابات الضرورية في الجدول التالي :



i	x_i	f_i		$2.x_i$	$2.x_if_i$
1	10	2		20	40
2	12	4		24	96
3	13	2		26	52
4	14	1		28	28
5	15	1		30	30
مج		10			246

جدول4-10

بتطبيق القاعدة يكون الوسط الحسابي الجديد كما يلي :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{246}{10} = 24.6$$

أي :

$$\bar{\bar{x}} = 2.\bar{x} = 2 \;.\; 12.3 = 24.6$$

و بالتالي فإن الخاصية صحيحة.

د-الخاصية الرابعة : مجموع مربعات فروقات القيم عن وسطها الحسابي، يكون دائما أقل من مجموع مربعات فروقات تلك القيم عن أية قيمة أخرى، مهما كانت تختلف عن الوسط الحسابي، أي:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 < \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 \;\;, \forall \bar{x} \neq c \qquad 24-4$$

هذا في حالة البيانات غير المبوبة أما في حالة البيانات المبوبة فيكون:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i < \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 f_i \;\;, \forall \bar{x} \neq c \qquad 25-4$$

الإثبات :

* **حالة البيانات غير المبوبة** : تعني العبارة 4-24 أن الطرف الأيسر منها يكون دائما في قيمته الدنيا أي مجموع مربعات فروقات القيم عن الوسط الحسابي يكون دائما في أدنى قيمة، و يعني ذلك أيضا أن الوسط الحسابي لمربعات تلك القيم يكون في أدنى قيمة، أي أن العبارة التالية تكون في أدنى قيمة لها



$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

لإثبات ذلك نستبدل الوسط الحسابي في المعادلة أعلاه بقيمة أخرى و لتكن Z، ثم نثبت أن العبارة K لاتأخذ قيمتها الدنيا الا إذا كانت القيمة Z تساوي الوسط الحسابي.

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)^2}{N} \qquad 26-4$$

من المعلوم أن K تكون في أدنى قيمة لها إذا توافر شرطان، الأول و هو الشرط اللازم و هو أن تكون مشتقتها الأولى معدومة، الثاني هو الشرط الكافي و فيه يجب أن تكون مشتقتها الثانية أكبر من الصفر، لذلك نوجد أولا المشتقة الأولى ونساويها الى الصفر ونوجد من خلال ذلك القيمة Z التي تجعل K معدومة، ثم نرى إذا ما كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر.

$$\frac{\delta K}{\delta Z} = \frac{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)}{N} = 0$$

ومنه يكون:

$$\frac{\delta K}{\delta Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)}{N} = 0$$

بفك القوس نجد :

$$\frac{\delta K}{\delta Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{N} - \frac{N.Z}{N} = 0$$



الطرف الأول هو الوسط الحسابي، ومنه نجد : $\bar{x} - Z = 0$
أي :

$$Z = \bar{x}$$

بما أن المشتقة الثانية للمعادلة 4-26 أعلاه أكبر من الصفر، لذلك فإن القيمة الوحيدة التي تجعل المعادلة 4-26 في أدنى قيمة لها هي الوسط الحسابي، و بالتالي فإن العبارة 4-24 صحيحة.

***حالة البيانات المبوبة**: العبارة 4-25 تعني أن طرفها الأيسر يكون دائما في أدنى قيمة، و يعني ذلك أيضا أن الوسط الحسابي لهذا الطرف يكون في أدنى قيمة، بمعنى أن الوسط الحسابي لمربعات الفروقات يكون في أدنى قيمة له. إذا استبدلنا الوسط الحسابي بالقيمة Z للطرف المشار اليه علينا أن نثبت بأن العبارة 4-27 :

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)^2 f_i}{\sum_{I=1}^{n} f_i} \qquad 27-4$$

تكون في أدنى قيمة لها عندما تكون قيمة Z تساوي الوسط الحسابي، وذلك إذا ما توافر شرطا النهاية الصغرى. بالإشتقاق بالنسبة الى Z ، ومساواة النتيجة الى الصفر نجد :

$$\frac{\delta K}{\delta Z} = \frac{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z) f_i}{\sum_{I=1}^{n} f_i} = 0$$



و هذا يكافيء:
$$\frac{\delta K}{\delta Z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z)f_i}{\sum_{I=1}^{n}f_i}=0$$

بفك القوس نجد :
$$\frac{\delta K}{\delta Z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i f_i}{\sum_{I=1}^{n}f_i}-\frac{Z\sum_{i=1}^{n}f_i}{\sum_{I=1}^{n}f_i}=0$$

الطرف الأول هو الوسط الحسابي، ومنه نجد : $\bar{x}-Z=0$ أي : $Z=\bar{x}$

بما أن المشتقة الثانية للمعادلة 4-27 أعلاه أكبر من الصفر، لذلك فإن القيمة الوحيدة التي تجعل المعادلة 4-27 في أدنى قيمة لها هي الوسط الحسابي، و بالتالي فإن العبارة 4-25 صحيحة.

يمكن اثبات هذه الخاصية أيضا بطريقة أخرى، نعطي فكرتها فقط على حالة البيانات غير المبوبة، وذلك كما يلي:

بفرض أنه لدينا مجموعة من القيم، فإن إنحرافها عن قيمة ماولتكن:Z هو:

$$(x_i-Z)=(x_i-\bar{x})-(Z-\bar{x})$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$(x_i-Z)^2=(x_i-\bar{x})^2-2(x_i-\bar{x})(Z-\bar{x})+(Z-\bar{x})^2$$

بإدخال المجموع نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-2(Z-\bar{x})\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+N(Z-\bar{x})^2$$

بالإستفادة من الخاصية الأولى للوسط الحسابي وهي : $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$



نجد: 28-4 $$\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)^2 = \sum_{I=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + N(Z - \bar{x})^2$$

نلاحظ أن الطرف الثاني يكون في أدنى قيمة له عندما يكون :

$$N(Z - \bar{x})^2 = 0$$

و يتحقق ذلك فقط عندما يكون Z يساوي الوسط الحسابي.

وفي حالة البيانات المبوبة تتم البرهنة بنفس الطريقة أو بضرب المعادلة 4- 28 في: f_i

مثال 4-10 : اثبت حسابيا أن مجموع مربعات فروقات بيانات الجدول 4-1، عن وسطها الحسابي، أصغر من مجموع مربعات فروقات هذه القيم عن القيمة : 20= c وعن القيمة : c = -5

لإثبات ذلك نجري الحسابات الضرورية من خلال الجدول التالي :

i	x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$	$(x_i - 20)^2 f_i$	$(x_i - (-5))^2 f_i$
1	10	2	10.58	200	450
2	12	4	0.36	256	1156
3	13	2	0.98	98	648
4	14	1	2.89	36	361
5	15	1	7.29	25	400
مج		**10**	**22.10**	**615**	**3015**

جدول 4-11

من الجدول نلاحظ ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - 12.3)^2 f_i = 22.10$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - 20)^2 f_i = 615$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - (-5))^2 f_i = 3015$$



أي أن مربع الفروقات عن الوسط الحسابي هو الأصغر، وبالتالي فان الخاصية صحيحة حسابيا.

هـ-الخاصية الخامسة : يمكن ايجاد الوسط الحسابي لأية مجموعة من البيانات بإستخدام وسط فرضي، عن طريق المعادلة التالية:

$$\bar{x} = Z + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)}{N} \qquad 29-4$$

هذا في حالة البيانات غير المبوبة، أما في حالة البيانات المبوبة، فيتم ذلك عن طريق المعادلة :

$$\bar{x} = Z + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 30-4$$

حيث Z : وسط فرضي تختلف قيمته عن الوسط الحسابي، أما إذا ساوت قيمته قيمة الوسط الحسابي، فإن الطرف الأخير في كل من المعادلتين 4- 29 و 4-30 يساوي الصفر.

و تسمى طريقة إيجاد الوسط الحسابي بإستخدام الوسط الفرضي، **بطريقة الفروقات**، و يمكن إثبات صحة المعادلتين 4-29 و 4-30 بنشرهما اذ نجد بأن الطرفين متساويين.

مثال4-11: أوجد الوسط الحسابي لبيانات الجدول 4-1، بإستخدام الوسط الفرضي: Z=20.

بما أن البيانات المشار اليها هي بيانات مبوبة، لذلك نطبق المعادلة 4-30، ونجري الحسابات الضرورية من خلال الجدول التالي :



i	x_i	f_i	$(x_i-20)f_i$
1	10	2	-20
2	12	4	-32
3	13	2	-14
4	14	1	-6
5	15	1	-5
مج		10	-77

جدول4-12

من الجدول 4-12 نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-20)f_i=-77$$

ومنه يكون :

$$\bar{x}=20+\frac{-77}{10}=12.3$$

و هي نفس قيمة الوسط الحسابي المحصل عليه في الأمثلة السابقة.

و-الخاصية السادسة : إذا كانت لدينا القيم :

$x_1, x_2, x_3,..........x_n$ وأضيفت الى كل قيمة منها القيم :

$y_1, y_2, y_3,..........y_n$ على التوالي، فإن الوسط الحسابي للقيم الجديدة :

$z_1, z_2, z_3,.........z_n$ يكتب على النحو:

$$\bar{Z}=\bar{x}+\bar{y} \qquad 31-4$$

حيث : $\bar{x}$: الوسط الحسابي للقيم الأصلية. $\bar{y}$: الوسط الحسابي للقيم المضافة. $\bar{Z}$: الوسط الحسابي للقيم الجديدة.

ويمكن البرهنة أيضا على هذه الخاصية سواء في حالة البيانات غير المبوبة أوفي حالة البيانات المبوبة، كما يلي :

الاثبات :

*** حالة البيانات غير المبوبة** :

الوسط الحسابي للبيانات الأصلية هو :

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{N}$$



الوسط الحسابي للبيانات المضافة هو :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N}$$

عند إضافة مجموعة القيم الى القيم الأصلية، يكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة على النحو:

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)}{N} \qquad 32-4$$

وبفك البسط يكون :

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N}$$

بتعويض الطرفين الأخيرين بقيمهما كما هي أعلاه نجد العلاقة 4-31 محققة.

* **حالة البيانات المبوبة** : في هذه الحالة يكون الوسط الحسابي للبيانات الأصلية كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

أما الوسط الحسابي للبيانات المضافة فهو:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ويكون الوسط الحسابي للبيانات الجديدة كما يلي :



$$\bar{Z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)f_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i} \qquad 33-4$$

بفك البسط نجد: $$\bar{Z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i f_i+\sum_{i=1}^{n}y_i f_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}+\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i f_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}$$

بتعويض الطرفين الآخيرين بقيمهما نجد أن العلاقة 4-31 صحيحة.

هذه هي أهم خصائص الوسط الحسابي، وهي خصائص يستعان بها إما في البرهنة على صحة الوسط الحسابي كما في الخاصية الأولى أو في تبسيط الحسابات خاصة عندما تكون المعطيات الرقمية كبيرة جدا، و قد لاحظنا أنه يحقق كل شروط يول وهذا ما يجعله من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها إستخداما في كافة مجالات التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية والاجتماعية وغيرها، غير أن أهم عيوبه هي أنه يتأثر بالقيم المتطرفة اذ ينجذب إليها وذلك لوزنها المؤثر ضمن مجموعة القيم، ومن عيوبه أيضا أنه في حالة التوزيعات التكرارية المستمرة المغلقة، لايمكن ايجاد الوسط الحسابي بكل دقة كما تمت البرهنة على ذلك خلال هذا الفصل، كما أنه في حالة التوزيعات التكرارية المستمرة المفتوحة يستحيل إيجاد الوسط الحسابي لعدم إمكانية إيجاد مركز الفئة الأولى أو مركز الفئة الأخيرة أو الاثنان معا، غير أن الباحث الاحصائي إذا ماكان ذو حنكة وتجربة فإنه يستطيع تقدير الحد الأدنى لأول فئة أو الحد الأعلى لآخر فئة،إعتمادا على توزيع بقية الفئات، وبالتالي يمكنه إيجاد وسط حسابي تقريبي للبيانات محل الدراسة.



ثانيا: الوسيط :الوسيط هو ثاني مقياس من مقاييس النزعة المركزية، الأكثر شيوعا، ويعرف كما يلي :

تعريف4-3: وسيط أية مجموعة من القيم، هو القيمة التي تقع في وسط تلك القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا، وتختلف طرق حسابه بإختلاف طبيعة البيانات.

1- وسيط البيانات غير المبوبة: يتم حساب الوسيط لهذه البيانات بإتباع الخطوات التالية :

ا- نقوم بترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا.

ب- نقوم بحساب ترتيب الوسيط c حسب عدد القيم إذا كان زوجيا أو فرديا.

- إذا كان عدد القيم N فرديا يكون :

$$c = \frac{N+1}{2} \qquad 34-4$$

وتكون قيمة الوسيط Mé هي القيمة التي ترتيبها c تصاعديا أوتنازليا.

- إذا كان عدد القيم N زوجيا يكون :

$$c = \frac{N}{2} \qquad 35-4$$

في هذه الحالة نجد قيمتين للوسيط، الأولى ترتيبها c وهي $Mé_1$ نجدها عند العد التصاعدي، والثانية هي $Mé_2$، ترتيبها أيضا c عند العد التنازلي أو ترتيبها c+1 عند العد التصاعدي، وبما أن الوسيط يكون وحيدا، أي يأخذ قيمة واحدة فقط ، لذلك تكون قيمته هي الوسط الحسابي للقيمتين $Mé_1$ و $Mé_2$ ، أي :

$$Mé = \frac{Mé_1 + Mé_2}{2} \qquad 36-4$$

مثال4-12 : أوجد وسيط البيانات التالية :

6 5 3 7 2 8 10

لايجاد وسيط هذه البيانات نقوم بترتيبها تصاعديا كما يلي :

2 3 5 6 7 8 10

بما أن عدد القيم فرديا، لذلك نوجد ترتيب الوسيط عن طريق المعادلة 4-34، ويكون :

$$c = \frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

وعليه تكون قيمة الوسيط هي التي تقع في الرتبة الرابعة، وبالتالي فان:

Mé=6

مثال4-13: أوجد وسيط البيانات التالية :

11 10 8 5 6 3 12 14

لايجاد الوسيط نقوم أيضا بترتيب القيم تصاعديا على النحو :

14 12 11 10 8 6 5 3

و بما أن عدد القيم زوجي لذلك نطبق المعادلة 4-35، و يكون :

$$c = \frac{N}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

ويعني هذا أن الوسيط يوجد في الرتبة الرابعة، غير أنه عند العد التصاعدي نجد:

$M é_1=8$

وعند العد التنازلي نجد : $M é_2=10$

وعليه يكون الوسيط :

$$Mé = \frac{Mé_1 + Mé_2}{2} = \frac{8+10}{2} = 9$$

2- وسيط البيانات المبوبة : البيانات المبوبة قد تكون غير مستمرة أي مدى فئاتها معدوم، وقد تكون مستمرة أي مدى فئاتها أكبر من الصفر، ويتم ايجاد الوسيط حسب كل حالة كما يلي :

أ- طول الفئات معدوم : في هذه الحالة يتم إيجاد الوسيط كما يلي :

* نوجد ترتيب الوسيط بإستخدام إحدى المعادلتين التاليتين :



$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i + 1}{2} \qquad 37\text{-}4$$

إذا كان مجموع التكرارات فرديا.

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} \qquad 38\text{-}4$$

إذا كان مجموع التكرارات زوجيا.

* نوجد التكرار المتجمع الصاعد ونبحث عن مكان ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة، فنجده بين تكرارين من التكرارات المتجمعة، وتكون قيمة الوسيط هي القيمة المقابلة للتكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط.

إذا ماكانت c تساوي إحدى قيم التكرارات المتجمعة فإن Mé تساوي الفئة المقابلة لها، سواء كان مجموع التكرارات زوجيا أوفرديا.

مثال4-14: أوجد وسيط البيانات التالية :

i	x_i	f_i
1	10	2
2	12	3
3	14	5
4	16	3
5	18	2
مج		**15**

جدول4-13

نوجد التكرار المتجمع الصاعد كما هو وارد في الجدول التالي :

i	x_i	f_i	الحدود العليا	ت.م.ص
1	10	2	-12	2
2	12	3	-14	5
3	14	5	-16	10
4	16	3	-18	13
5	18	2	-20	15
مج		**15**		

جدول4-14

ثم نوجد ترتيب الوسيط، بتطبيق المعادلة 4-37 فيكون :

$$c = \frac{15+1}{2} = 8$$

ترتيب الوسيط يوجد بين التكراريـن المتجمعين : 5 و 10، لذلك فان الوسيط يساوي الى الفئةالمقابلة لـ : 10، وبالتالي يكون :

$$Mé = 14$$

ب-طول الفئات أكبر من الصفر : يتم إيجاد الوسيط في هذه الحالة، بعدة طرق تعطي نتائج متقاربة في الغالب وهي :

* **الطريقة الأولى** : يتم إيجاد الوسيط حسب هذه الطريقة بإستخدام المنهجية التالية:

ا- نوجد التكرار المتجمع الصاعد أو التكرار المتجمع النازل.

ب- نوجد ترتيب الوسيط باستخدام المعادلة التالية :

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} \qquad 39-4$$

ج- نبحث عن مكان ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة، فنجده بين تكرارين من التكرارات المتجمعة أحدهما سابق له و الآخر لاحق له.

د- نبحث عن الفئة الوسيطية في حدود الفئات التي تحدد التكرار المتجمع، بحيث يكون الحد الأدنى للفئة الوسيطية هو الحد المقابل للتكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط، وحدها الأعلى هو الحد المقابل للتكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط.

هـ- نطبق المعادلة التالية لإيجاد قيمة الوسيط :

$$Mé = d + \frac{c - f_{i-1}^{+}}{f_{i+1}^{+} - f_{i-1}^{+}} \times L \qquad 40-4$$

حيث :

M é	قيمة الوسـيط.
d	الحد الأدنى للفئـة الوسـيطية.
c	ترتيب الوسـيط.
L	طول الفئة الوسـيطية.
f^+_{i-1}	التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط
f^+_{i+1}	التكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط

مثال4-15: أوجد وسـيط البيانـات التاليـة :

i	الفئات	f_i
1	أقل من10	5
2	10-20	8
3	20-30	6
4	30-40	5
5	40-50	4
6	50-60	2
مج		30

جدول4-15

الإجابـة:لإيجـاد الوسـيط بالطريقـة الأولى نطبـق المعادلـة 4-40، ولأجل ذلـك، نوجـد التكـرار المتجمـع الصـاعد كمـا هـو وارد في الجـدول أدنـاه، ونوجـد ترتيـب الوسـيط، بتطبيـق المعادلـة 4-39، حيث نجـد: c=15

i	الفئات	f_i	الحد الأعلى	ت.م.ص
1	-10	5	-10	5
2	10-20	8	-20	13 → f^+_{i-1}
3	20-30	6	-30	19 → f^+_{i+1}
4	30-40	5	-40	24
5	40-50	4	-50	28
6	50-60	2	-60	30
مج		30		

جدول4-16



و بالتالي نجد : c محصور بين التكراريين المتجمعين :(19>c>13) كما هو مشار إليه في الجدول أعلاه، وتكون الفئة الوسيطية هي: (20-30)، ومنه يكون : d=20، L=10، و تكون قيمة الوسيط هي:

$$Mé = 20 + \frac{15-13}{19-13} \times 10 = 23.33$$

الطريقة الثانية : حسب هذه الطريقة يتم إستخدام نفس الخطوات أ، ب، ج، د المشار اليها في الطريقة الأولى، مع إستبدال معادلة الخطوة الأخيرة بالمعادلة التالية :

$$Mé = d + \frac{c - f_{i-1}^{+}}{f_i} \times L \qquad 41-4$$

حيث :

قيمة الوسيط.	$Mé$
الحد الأدنى للفئة الوسيطية.	d
ترتيب الفئة الوسيطية	c
طول الفئة الوسيطية.	L
التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط	f_{i-1}^{+}
تكرار الفئة الوسيطية	f_i

مثال 4-16: أوجد وسيط بيانات المثال 4-15.

بتطبيق المعادلة 4-41 نجد :

$$Mé = 20 + \frac{15-13}{6} \times 10 = 23.33$$

وهي نفس القيمة المحصل عليها باستخدام الطريقة السابقة.

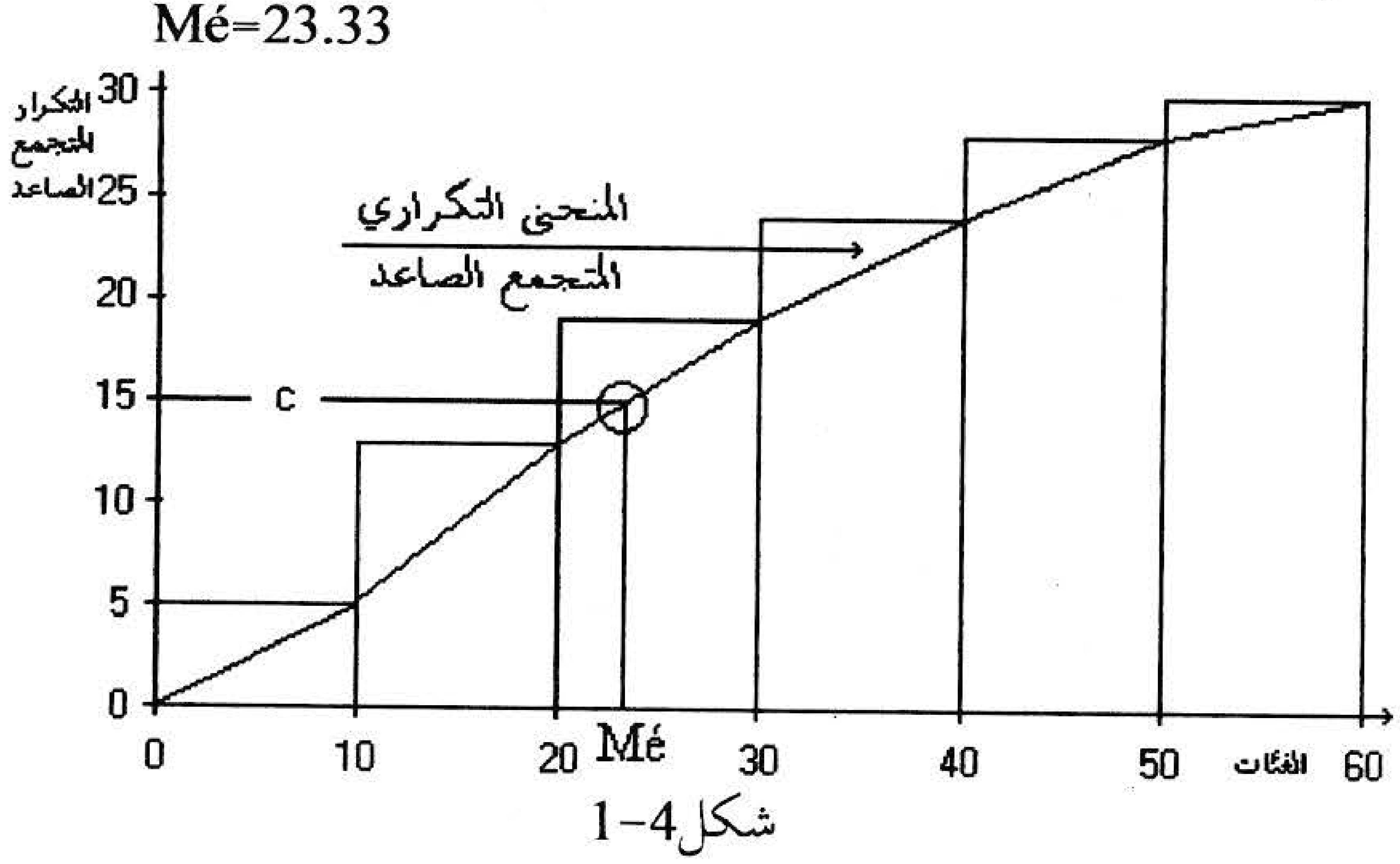
الطريقة الثالثة : وهي الطريقة البيانية، إذ يمكن إيجاد الوسيط بيانيا، وذلك برسم ، إما المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أوالمنحنى التكراري المتجمع النازل على معلم متعامد، ثم رسم مستقيم موازي للمحور الأفقي إنطلاقا من النقطة التي

تمثل ترتيب الوسيط المعرف بالمعادلة 4-39 أعلاه إنطلاقا من المحور العمودي، وتكون نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المنحنى المتجمع، هي التي تحدد قيمة الوسيط، وذلك بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي، فنجد قيمة الوسيط عند نقطة تقاطعهما.

مثال 4-17: أوجد وسيط بيانات المثال 4-15 أعلاه باستخدام الطريقة البيانية.

الإجابة: بتطبيق مبدأ إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية أعلاه وإعتمادا على التكرار المتجمع الصاعد كما هو معروض في الجدول 4-16، نجد من خلال الشكل 4-1 أن Mé يساوي تقريبا نفس قيمة الوسيط كما حسبت بالطريقتين السابقتين وهي:

Mé=23.33



شكل4-1

يمكن إيجاد الوسيط بيانيا أيضا، بإنزال شاقول من نقطة **تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل**، على المحور الأفقي، إذ أن نقطة تقاطع هذا الشاقول مع المحور الأفقي هي القيمة الوسيطية، وذلك ما يوضحه المثال التالي:

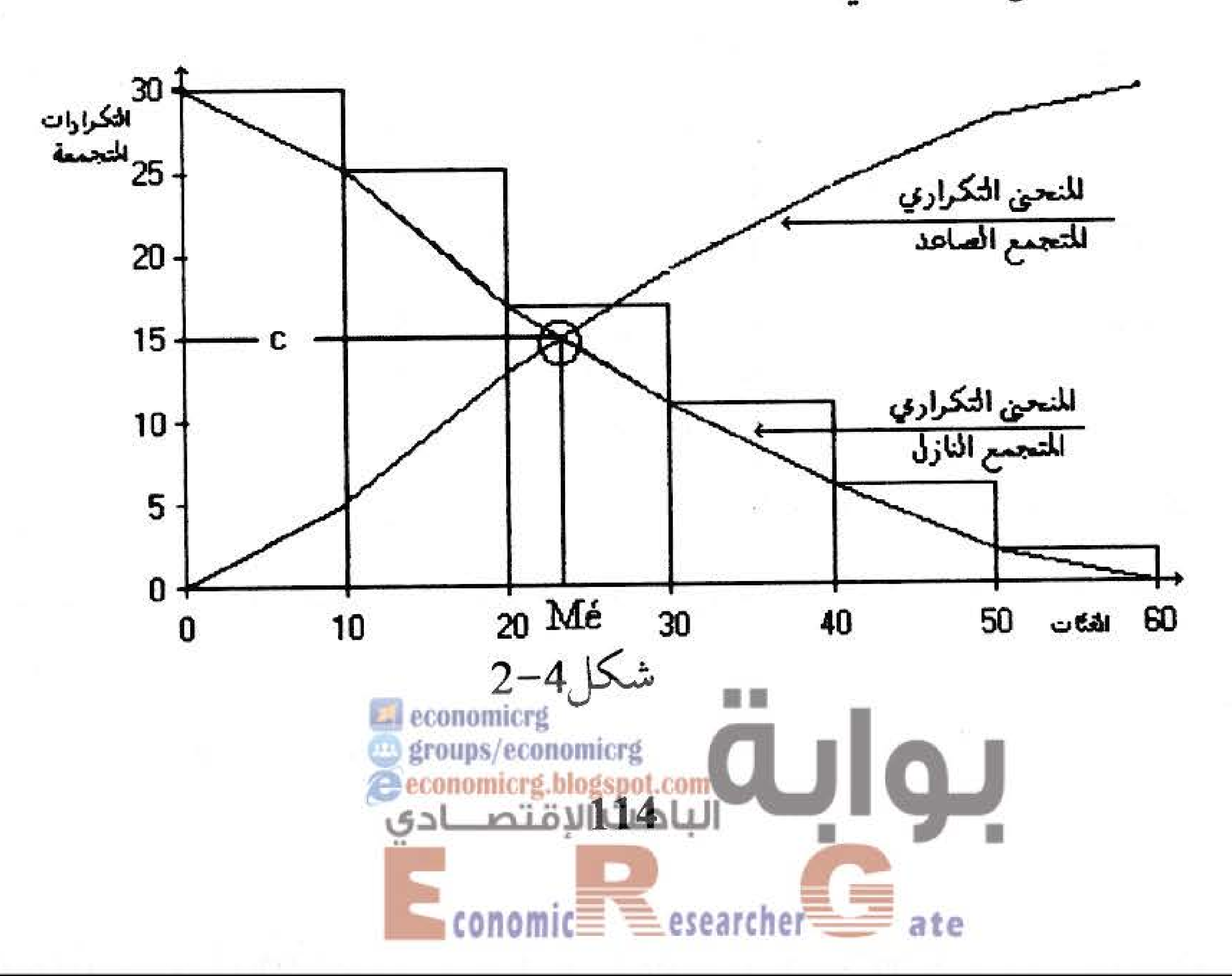
مثال4-18: أوجد وسيط بيانات المثال 4-15، من خلال نقطة التقاطع بين المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل.

الإجابة: التكرار المتجمع الصاعد معروض في الجدول رقم 4-16 أعلاه، أما التكرار المتجمع النازل فهو معروض في الجدول 4-17 أدناه.

i	الفئات	f_i	الحد الأدنى	ت.م.ن
1	-10	5	المجموع	30
2	10-20	8	10فأكثر	25
3	20-30	6	20فأكثر	17
4	30-40	5	30فأكثر	11
5	40-50	4	40فأكثر	6
6	50-60	2	50فأكثر	2
مج		30		

جدول4-17

برسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل على نفس المعلم، نجدهما متقاطعين بالفعل، عند نقطة شاقولها يتقاطع مع المحور الأفقي عند نقطة تمثل قيمة الوسيط Mé =23.33، وذلك ما يوضحه الشكل التالي:



شكل4-2

4-خصائص الوسيط : على عكس الوسط الحسابي، فإن الوسيط لايتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة، لأنه لايعتمد على القيم في حد ذاتها، بل على ترتيبها، و هو بالتالي أقل أهمية من الوسط الحسابي لكونه لايحقق إلاّ بعضا من شروط يول، و عموما يغلب إستخدامه في البيانات التي لاتعرف قيمها، ولكن ترتيبها معروف، كما يستخدم أيضا في البيانات الناقصة وكذا في التوزيعات التكرارية المفتوحة.

ثالثا: المنوال

تعريف 4-4: يعرف المنوال لمجموعة من البيانات بأنه الفئة الأكثر تكرارا بين مجموعة القيم، ويتم حسابه كما يلي :

1- البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة التي طول فئاتها معدوم : منوال مثل هذه البيانات هو الفئة الأكثر تكرارا.

2- البيانات المبوبة التي مدى فئاتها أكبر من الصفر : لإيجاد المنوال يتم استخدام احدى الطرق التالية :

أ-الطريقة الأولى : وهي أبسط الطرق، وتسمى بطريقة مركز الفئة المنوالية، وفيها تكون قيمة المنوال هي الوسط الحسابي للفئة المنوالية.

ب-الطريقة الثانية : تسمى بطريقة الرافعة، وفيها يتم إيجاد المنوال بإستخدام المعادلة التالية :

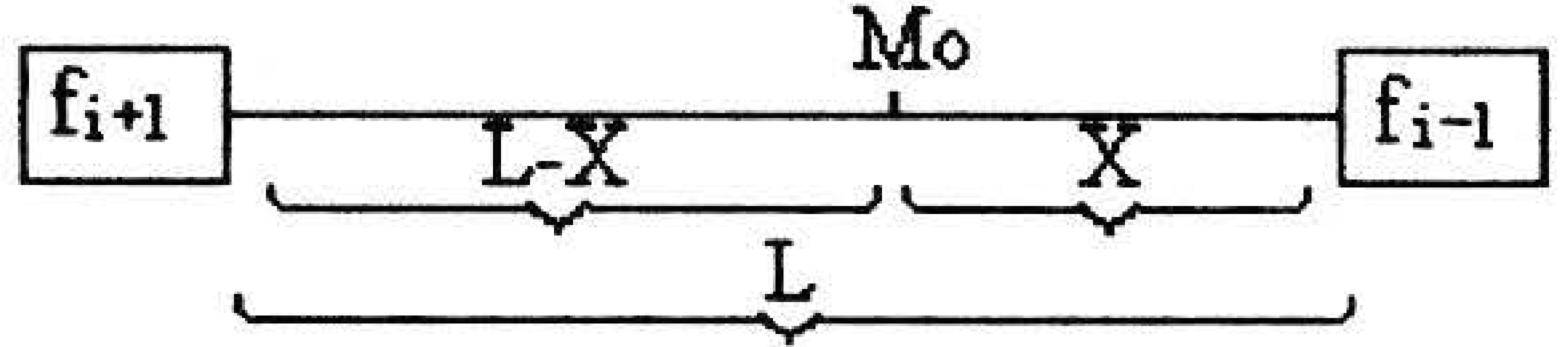
$$Mo = d + \frac{f_{i+1}}{f_{i+1} + f_{i-1}} \times L \qquad 42-4$$

حيث :



Mo	المنـوال
d	الحد الأدنى للفئـــة المنواليـــة
L	طول الفئة المنواليـــة
f_{i+1}	التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية
f_{i-1}	التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية

تسمى هذه الطريقـــة بطريقـــة الرافعـــة لإعتمادهـــا علـــى مبـــدأ الرافعـــة المعروفـــة في الفيزيـــاء، و مبدأهـــا أن النقطـــة الـــتي يحـــدث عندهـــا توازن الرافعة هـــي الـــتي يتحقـــق عندهـــا تســـاوي الكتلـــة اليمـــنى في الذراع الأيمن مع الكتلـــة اليســـرى في الـــذراع الأيســـر، فـــإذا أفترضنـــا أن المنوال هـــو النقطـــة الـــتي يحـــدث عندهـــا التـــوازن داخـــل الفئـــة المنوالية تتجاذبه كتلتـــان همـــا التكـــرار الســـابق لتكـــرار الفئـــة المنواليـــة و التكرار اللاحـــق للفئـــة المنواليـــة، فإنـــه يجـــب أن يســـاوي الى الحـــد الأدنى للفئـــة المنواليـــة مضافـــا اليـــه مقـــدار ثـــابت بـــين الحـــد الأدنى ونقطة التوازن، ويمكن تصور ذلـــك مـــن خـــلال الشـــكل التـــالي:



مـــن الشـــكل أعـــلاه ينبغـــي البحـــث عـــن القيمـــة X الـــتي يجـــب إضافتـــها الى الحـــد الأدنى للفئـــة المنواليـــة d للحصـــول علـــى القيمـــة المنوالية. بتطبيق مبدأ الرافعة وإعتمـــادا علـــى الشـــكل الســـابق نجـــد:

$$f_{i-1} \times X = f_{i+1}(L - X)$$

بفك المعادلة نجـــد أن القيمـــة X هـــي :

$$X = \frac{f_{i+1}}{f_{i+1} + f_{i-1}} \times L$$

و بالتالي تكون القيمـــة المنواليـــة حســـب المعادلـــة 4-42 أي:



$$Mo = d + \frac{f_{i+1}}{f_{i+1} + f_{i-1}} \times L$$

مثال 4-19: أوجد منـــوال البيانـــات التاليـــة :

i	1	2	3	4	5
الفئات	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
f_i	3	10	20	15	7

جدول4-18

من الجدول نجد أن الفئة المنوالية، أي الفئة الأكثر تكرارا هي : (7-9) وبالتالي نجد :

$f_{i-1} = 10$ $\quad f_{i+1} = 15$ $\quad L=2$ $\quad d=7$

بتطبيق المعادلة رقـــم : 4-42 نجـــد :

$$Mo = 7 + \frac{15}{15+10} \times 2 = 8.2$$

أي أن القيمة المنوالية هي : $Mo = 8.2$

ج-الطريقــة الثالثــة : وتســمى بطريقــة الفروقـــات أو طريقـــة بيرسون، وفيها يعطى المنـــوال بالقـــاعدة التاليـــة :

$$Mo = d + \frac{d_{i-1}}{d_{i+1} + d_{i-1}} \times L \qquad 43-4$$

حيـــث :

d	الحد الأدنى للفئة المنوالية
L	طول الفئة المنوالية
d_{i-1}	الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة لها
d_{i+1}	الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها

مثـــال4-20: أوجـــد منـــوال بيانـــات المثـــال 4-19 بإســـتخدام طريقـــة الفروقـــات.

الإجابة: بتطبيـــق المعادلـــة 4-43 نجـــد :



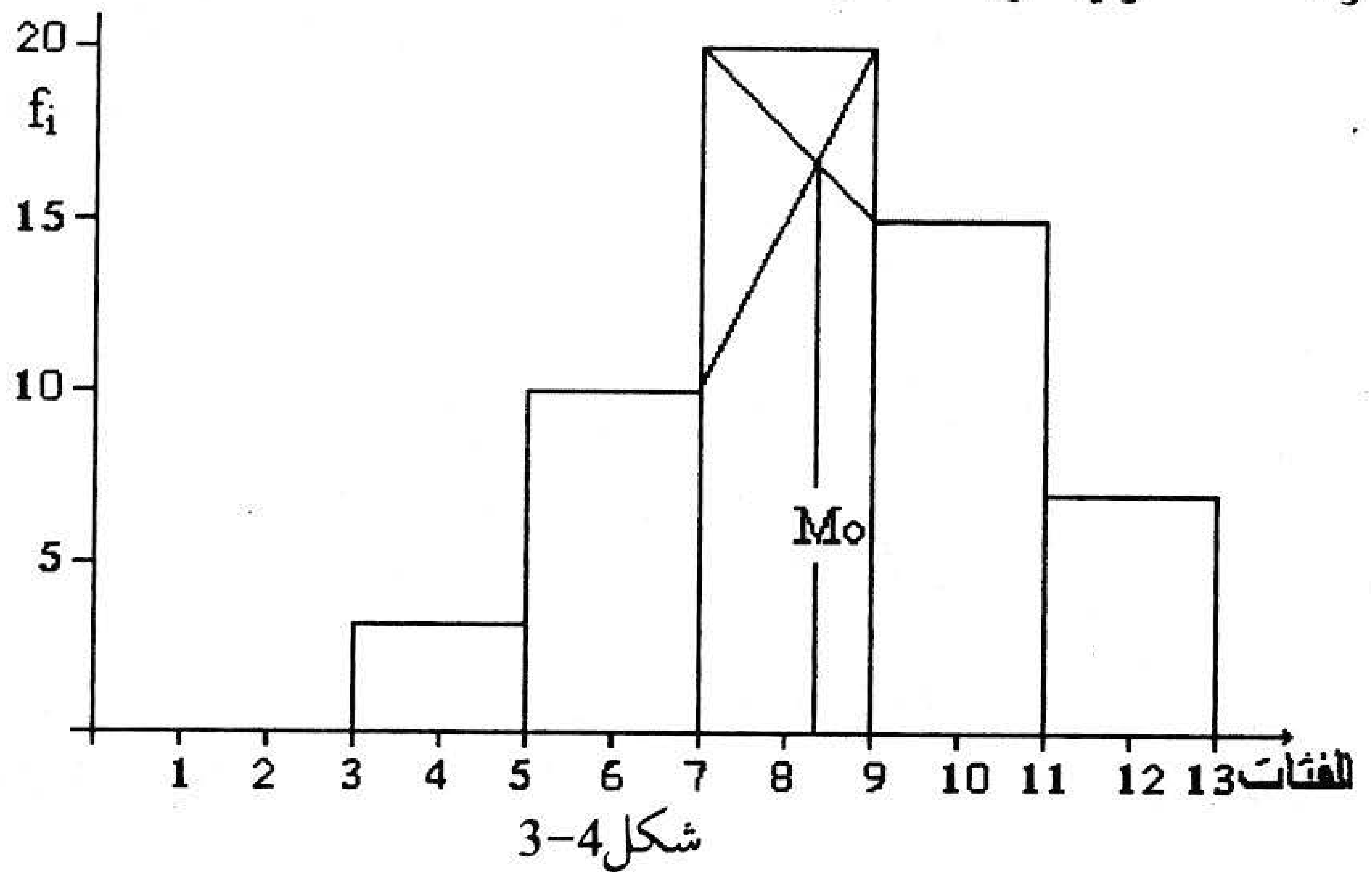
$d_{i+1} = 20-15=5 \qquad d_{i-1} = 20-10=10 \qquad L= 2 \qquad d= 7$

ومنه يكون :

$$Mo = 7 + \frac{10}{10+5} \times 2 = 8.33$$

يلاحظ أن هذه الطريقة لاتعطي قيم متطابقة تماما مع القيم التي تعطيها الطريقة السابقة، لكنها متقاربة في أغلب الأحيان.

د-الطريقة الرابعة: و هي الطريقة البيانية، وفيها يتم رسم المدرج التكراري ثم يتم أولا الوصل بين النقطة التي تمثل الحد الأعلى للفئة السابقة للفئة المنوالية والنقطة التي تمثل الحد الأعلى للفئة المنوالية، ثم ثانيا بين النقطة التي تمثل الحد الأدنى للفئة المنوالية و النقطة التي تمثل الحد الأدنى للفئة اللاحقة للفئة المنوالية، يتقاطع الخطان في نقطة شاقولها على المحور الأفقي يمثل القيمة المنوالية، وذلك كما هو واضح في الشكل أدناه، والذي هو تجسيد لبيانات المثال 4-19، حيث نجد القيمة المنوالية تساوي تقريبا 8.3.



شكل4-3

3-خصائص المنوال : من خصائص المنوال، أنه أبسط مقاييس النزعة المركزية، وأنه لايتأثر بالقيم المتطرفة، لأنه لايأخذ

في الحسبان جميع القيم، كما يمكن إيجاده لجميع التوزيعات بما فيها التوزيعات التكرارية المفتوحة، ومن مميزاته أيضا أنه لايحتاج الى حسابات معقدة، الا في البيانات التكرارية التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، وهو على عكس مقاييس النزعة المركزية الأخرى، إذ يمكن أن يكون لمجموعة من البيانات أكثر من منوال واحد، إضافة الى هذا فإنه المقياس الوحيد الذي يمكن تطبيقه على البيانات ذات الصفات النوعية.

4-العلاقة بين المنوال الوسط الحسابي والوسيط : إذا كان لمجموعة من البيانات منوال واحد، ومنحناها التكراري يقترب من التماثل، فإن قيمة الوسيط عموما تكون بين الوسط الحسابي والمنوال، وتتحقق المعادلة التالية بصفة تقريبية.

$$\frac{\bar{x} - Mo}{3} = \bar{x} - Mé \qquad 44-4$$

رابعا:الوسط الهندسي

تعريف 4-5: الوسط الهندسي لأية مجموعة من القيم، هو الجذر النوني لجداءات تلك القيم، وتختلف طريقة حسابه حسب طبيعة تقديم البيانات :

1-البيانات غير المبوبة : اذا كانت لدينا القيم: $x_1, x_2, x_3 .....x_n$ ، فإن وسطها الهندسي هو :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ . \ . \ . \ \times x_n} \qquad 45-4$$

واختصارا يكتب على شكل المعادلة 4-46 أدناه :

$$G = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}} \qquad 46-4$$



غير أنه لتسهيل الحسابات، ينبغي إدخال اللوغاريتم على الطرفين، وإجراء الحسابات اللازمة ثم تحويل النتيجة بعد ذلك الى قيمتها الحقيقية، ويتم ذلك كما يلي :
المعادلة 4-45 تكتب كما يلي :

$$G = (x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ . \ . \ . \ \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد :

$$LogG = \frac{1}{N} Log(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ . \ . \ . \ \times x_n)$$

حسب خواص اللوغاريتمات فإنه يمكن أن نكتب هذه العبارة كما يلي:

$$LogG = \frac{1}{N}(Logx_1 + Logx_2 + Logx_3 + ... + Logx_n$$

و منه نجد :

$$LogG = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Log\ x_i \qquad 47-4$$

و بالعودة الى الأصل نجد :

$$G = 10^{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Log\ x_i} \qquad 48-4$$

حيث القيمة 10 هي أساس اللوغاريتم العشري، و يتم إستبدالها بالقيمة e= 2.718 في حالة إستخدام اللوغاريتم النيبيري.

مثال 4-21: أوجد الوسط الهندسي للبيانات التالية :

2 5 3 7 10 20

لإيجاد الوسط الهندسي نطبق المعادلة 4-45 أو 4-46، على النحو التالي:

$$G = \sqrt[6]{2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 10 \times 20.}$$

بادخال اللوغاريتم على الطرفين نجد :

$$LogG = \frac{1}{6}(Log2 + log5 + log3 + log7 + log10 + log20) = 0.77$$

و منه نجد:

$$G = 10^{0.77} = 5.89$$

2-البيانات المبوبة : في هذه الحالة يجب أخذ التكرارات بعين الاعتبار، لذلك فالوسط الهندسي يعطى بالمعادلة التالية :

$$G = \sqrt[\sum f_i]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times x_3^{f_3} \times \ldots \times x_n^{f_n}} \qquad 49-4$$

لإيجاد قيمة الوسط الهندسي يتم أيضا إدخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة، أي إيجاد قيمة لوغاريتم الوسط الهندسي أولا، ثم إيجاد قيمة الوسط الهندسي بعد ذلك برفع القيمة 10 الى أس اللوغاريتم و ذلك كما يلي:

$$G = \left[x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times x_3^{f_3} \times \ldots \times x_n^{f_n}\right]^{\frac{1}{\sum f_i}}$$

وبادخال اللوغاريتم نجد :

$$LogG = \frac{1}{\sum f_i} \sum_{I=1}^{n} f_i Logx_i$$

و منه يكون :

$$G = 10^{\frac{1}{\sum f_i} \sum_{I=1}^{n} f_i Logx_i} \qquad 50-4$$

هذا فيما لو إستخدم اللوغاريتم العشري، أما عندما نستخدم اللوغاريتم النيبيري، فيتم إستبدال الرقم 10 بـ : e= 2.718.

مثال:4-22: أوجد الوسط الهندسي للبيانات التالية :

i	x_i	f_i
1	5	20
2	8	25
3	10	15
4	15	10
مج		70

جدول4-19



بإستخدام المعادلة 4-50 و بمساعدة الجدول التالي :

i	x_i	f_i	$f_i.Logx_i$
1	5	20	13.98
2	8	25	22.58
3	10	15	15.00
4	15	10	11.76
مج		**70**	**63.32**

جدول4-20

نجد :

$$LogG = \frac{1}{70} \times 63.32 = 0.9045$$

أي :

$$G = 10^{0.9045} = 8.03$$

ويتم إيجاد الوسط الهندسي للبيانات التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، بنفس الطريقة مع إستبدال القيم x_i بمراكز الفئات وذلك في المعادلة 4- 50 أو 4-49.

ويستخدم الوسط الهندسي في البيانات التي تشكل أو تكاد تشكل متوالية هندسية، كبيانات تطور عدد السكان، أو بيانات المبالغ المستثمرة وفق فائدة مركبة، أما في غير ذلك فهو نادر الاستخدام لصعوبة حسابه.

ومن خواصه أن حاصل ضرب مجموعة من القيم لا يتغير إذا استبدلت كل قيمة من هذه القيم بالوسط الهندسي، فإذا كانت لدينا القيم : 2،5، 15 مثلا فإن جداؤها هو : 2×5×15 = 150 بينما و سطها الهندسي هو :

$$G = \sqrt[3]{2 \times 5 \times 15} = 5.31$$

عند إستبدال كل قيمة بالوسط الهندسي نجد :

$$150 = 5.31 \times 5.31 \times 5.31$$

و يكون الوسط الهندسي دائما أقل من الوسط الحسابي، ولا يتساوى معه إلا اذا كانت جميع قيم الظاهرة متساوية.



كما أن الوسط الهندسي يأخذ بعين الاعتبار جميع مفردات القيم، و لايتأثر بالقيم الشاذة، و هو يحقق بعضا من شروط يول، ومن عيوبه أنه لايمكن حسابه في حالة بيانات التوزيعات التكرارية المفتوحة أو التي يكون جداءها سالبا.

خامسا: الوسط التربيعي

تعريف 4-6 : الوسط التربيعي لأية مجموعة من القيم، هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات تلك القيم، ويتم حسابه حسب طبيعة البيانات كما يلي:

1- البيانات غير المبوبة : اذا كانت لدينا البيانات :

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots x_n$

فإن وسطها التربيعي يعطى كما يلي :

$$Q=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}{N}} \qquad 51-4$$

واختصارا يكتب :

$$Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N}} \qquad 52-4$$

مثال 4-23: أوجد الوسط التربيعي لبيانات المثال 4-21.

لإيجاد الوسط التربيعي نبحث عن مربعات القيم ثم نوجد الجذر التربيعي لوسطها الحسابي كما يلي :

i	1	2	3	4	5	6	مجموع
x_i	2	5	3	7	10	20	**47**
x_i^2	4	25	9	49	100	400	**587**

جدول4-21



ومنه يكون :
$$Q = \sqrt{\frac{587}{6}} = 9.89$$

2- البيانات المبوبة : في هذه الحالة يجب أخذ التكرارات بعين الاعتبار، بحيث يكون الوسط التربيعي على النحو التالي :

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{I=1}^{n} f_i}} \qquad 53-4$$

مثال 4-24: أوجد الوسط التربيعي لبيانات المثال 4-22.

بتطبيق المعادلة رقم :4-53 وبمساعدة الجدول التالي :

i	x_i	f_i	x_i^2	$x_i^2.f_i$
1	5	20	25	500
2	8	25	64	1600
3	10	15	100	1500
4	15	10	225	2250
مج		**70**		**5850**

جدول4-22

نجد :
$$Q = \sqrt{\frac{5850}{70}} = 9.14$$

وفي حالة البيانات المبوبة التي مدى فئاتها أكبر من الصفر يتم كذلك إستبدال القيم x_i بمراكز الفئات في المعادلة 4-53.

من خواص الوسط التربيعي أنه دائما أكبر من الوسط الحسابي، إلا اذا كانت جميع القيم متساوية، وهو يحقق جزئيا بعضا من شروط يول، كما أنه قليل الإستخدام و يمكن الإستعانة به في حساب الإنحراف المعياري كما سيأتي في الفصل الموالي.



سادسا : الوسط التوافقي

تعريف4-7: الوسط التوافقي لمجموعة من القيم، هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوب تلك القيم، ويتم إيجاده حسب طبيعة البيانات كما يلي:

1- البيانات غير المبوبة :إذا كانت لدينا البيانات $x_1, x_2, x_3....x_n$، فإن وسطها التوافقي يعطى كما يلي :

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\right]} \qquad 54-4$$

مثال 4-25: أوجد الوسط التوافقي لبيانات المثال 4-21:

بتطبيق المعادلة رقم 4-54 وبمساعدة الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	مج
x_i	2	5	3	7	10	20	**47**
خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	**1.326**

جدول4-23

نجد :

$$H = \frac{6}{1.326} = 4.52$$

2- البيانات المبوبة :اذا كانت لدينا البيانات : $x_1 , x_2 , x_3 ,..... , x_n$ تكراراها على التولي : $f_1 , f_2 , f_3 , ... , f_n$ فإن وسطها التوافقي يعطى كما يلي:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\right] f_i} \qquad 55-4$$

مثال4-26:أوجد الوسط التوافقي لبيانات المثال4-22.

بإستخدام المعادلة رقم 4-55 وبمساعدة الجدول التالي :



i	x_i	f_i	$\frac{1}{x_i}$	$\frac{1}{x_i}f_i$
1	5	20	0.200	4.000
2	8	25	0.125	3.125
3	10	15	0.100	1.500
4	15	10	0.067	0.670
مج		**70**		**9.295**

جدول4-24

نجد :
$$H = \frac{70}{9.295} = 7.53$$

نتيجة لصعوبة حساب الوسط التوافقي، فإنه أقل مقاييس النزعة المركزية إستخداما، و يقتصر إستخدامه أحيانا على إيجاد متوسطات الأسعار.

3-العلاقة بين الوسط التوافقي والوسط الحسابي، الوسط الهندسي: إذا كانت لدينا مجموعة من القيم وحسبت أوساطها الحسابي، الهندسي والتوافقي، فإننا سوف نجد العلاقة التالية بينها :

$$H \leq G \leq \bar{x} \qquad 56-4$$

ماتجدر الإشارة إليه أخيرا هو أن **جميع مقاييس النزعة المركزية تأخذ نفس وحدات قياس المعلومات الأولية**، سواء كانت وحدات القياس هذه طبيعية بسيطة أو مركبة أونقدية، كما نشير أيضا الى أن الوسطين، الحسابي والتربيعي يتأثران بالقيم الكبيرة، اذ أنهما أكبر تحيزا إليها، بينما الوسطين التوافقي والهندسي أكثر تحيزا للقيم الصغيرة.

هذه هي مقاييس النزعة المركزية الأكثر شهرة، وهناك مقاييس جزئية أخرى، تهتم بترتيب القيم، لذلك نصطلح على تسميتها بمقاييس الترتيب أومقاييس الوضع ومنها الربيعات ، العشيرات والمئيات.

سابعا: الربيعات : كل مجموعة من البيانات يمكن تقسيمها الى أربعة أقسام متساوية بعد ترتيبها تصاعديا، يفصل بين كل قسم، ما



يسمى بالربيع، ويتعارف على ربيعيين أساسيين، هما الربيع الأدنى، ويسمى أيضا الربيع الأول، والربيع الأعلى، ويسمى كذلك الربيع الثالث، أما الربيع الأوسط فهو عبارة عن الوسيط كما عرفناه سابقا، ونرمز للربيعيات بـ: Q_i، حيث: $i=1\ ,\ 2\ ,\ 3$.

1-الربيع الأدنى:

تعريف4-8 : الربيع الأدنى لمجموعة من القيم، هو القيمة التي يكون قبلها 25 % على الأكثر وبعدها 75 % على الأكثر، من إجمالى عدد القيم، بعد ترتيبها تصاعديا، ويحسب ترتيبه كما يلي:

أ-حالة البيانات غير المبوبة:

$$c_1 = N.\frac{25}{100} \qquad 57-4$$

حيث N : عدد القيم.

ب-حالة البيانات المبوبة:

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{25}{100} \qquad 58-4$$

2- الربيع الأعلى:

تعريف4-9 : الربيع الأعلى لمجموعة من البيانات،هو القيمة التي يكون قبلها 75 % على الأكثر و بعدها 25 % على الأكثر من إجمالي عدد القيم، بعد ترتيبها تصاعديا، ويحسب ترتيبه كما يلي :

أ- حالة البيانات غير المبوبة :

$$c_3 = N.\frac{75}{100} \qquad 59-4$$

ب-حالة البيانات المبوبة :

$$c_3 = \sum_{i=1}^{n} f_i .\frac{75}{100} \qquad 60-4$$

مثال4-27: أوجد الربيع الأدنى و الربيع الأعلى للبيانات التالية:



15 13 10 8 5 4 2

الإجابة : بتطبيق المعادلتين 4-58 و 4-59 نجد ترتيب الربيعين على التوالي : $c_1 = 1.75$ $c_3=5.25$

لذلك يجب أن يكون قبل الربيع الأول على الأكثر قيمة واحدة و بعده 5 قيم على الأكثر، وبالتالي يكون : $Q_1= 4$

كما يجب أن يكون قبل الربيع الأعلى 5 قيم على الأكثر و بعده قيمة واحدة على الأكثر، وبالتالي يكون: $Q_3=13$

ملاحظة: بالنسبة للبيانات المبوبة أنظر المثال4-28 في نهاية هذا الفصل.

ثامنا:العشيرات : كل مجموعة من البيانات يمكن تقسيمها الى عشرة أقسام متساوية، بعد ترتيبها تصاعديا، يفصل بين كل قسم ما يسمى بالعشير، وهناك ما يسمى بالعشير الأول، الثاني، الثالث... و التاسع، ونرمز للعشيرات بالرمز : D_i، حيث : $i=1,2,3.......9$

تعريف4-10: عشير مجموعة من البيانات هو القيمة التي تفصل بين أقسام هذه المجموعة بعد تجزئتها الى عشرة أجزاء متساوية، وعلى هذا فالعشير الأول هو القيمة التي يكون قبلها عشر البيانات وبعدها تسعة أعشارها، والعشير الثاني هو القيمة التي يكون قبلها عشري البيانات وبعدها ثمانية أعشارها... ويحسب ترتيب كل عشير كما يلي :

$$c_i = N.\frac{i}{10} \qquad 61-4$$

حيث : i : رقم العشير، N: عدد القيم. هذا في حالة البيانات غير المبوبة، أما في حالة البيانات المبوبة، فيتم إستبدال N بمجموع التكرارات، ويكون :

$$c_i = \sum_{i=1}^{n} f_i.\frac{i}{10} \qquad 62-4$$

تاسعا:المؤينات : يمكن كذلك تقسيم كل مجموعة من البيانات الى مائة قسم متساو بعد ترتيبها تصاعديا، يفصل بين كل قسم ما يسمى



بالمؤين، وهناك ما يسمى بالمؤين الأول، الثاني، الثالث... و التاسع والتسعون، ونرمز للمؤين بالرمز : C_i، حيث : $i=1, 2, 3......99$

تعريف 4-11: مؤين مجموعة من البيانات هو القيمة التي تفصل بين أقسام هذه المجموعة بعد تجزئتها الى مائة جزء متساو، وعلى هذا فالمؤين الأول هو القيمة التي يكون قبلها واحد على مائة من البيانات وبعدها تسعة وتسعون على مائة من تلك البيانات ، والمؤين العاشر هو القيمة التي يكون قبلها عشرة على مائة من البيانات وبعدها تسعون على مائة من تلك البيانات... و يحسب ترتيب كل مؤين كما يلي :

$$c_i = N.\frac{i}{100} \qquad 63-4$$

حيث : i: رقم المؤين، N: عدد القيم. هذا في حالة البيانات غير المبوبة، أما في حالة البيانات المبوبة، فيتم إستبدال N بمجموع التكرارات، ويكون :

$$c_i = \sum_{i=1}^{n} f_i.\frac{i}{100} \qquad 64-4$$

و ما تجدر الإشارة اليه هو أن، طريقة إيجاد كل من الربيعيات والعشيرات والمؤينات ، تتم بنفس طرق إيجاد الوسيط ، مع إستبدال ترتيب الوسيط c، بترتيب الربيعيات و العشيرات والمؤينات، حسب الحالة.

وعند إستخدام **الطريقة البيانية**، لإيجاد، كل من الربيعيات والعشيرات والمؤينات، فإنه يتم رسم المنحنى التكراري المتجمع النازل أو الصاعد على معلم متعامد، وإنطلاقا من نقطة ترتيب إما الربيع أوالعشير أو المؤين، يتم إمداد خط مستقيم موازي للمحور الأفقي، وتكون نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المنحنى المتجمع النازل أو الصاعد هي التي تحدد الربيع أو العشير أوالمؤين حسب الحالة، وذلك بإنزال شاقول من نقطة



التقاطع تلك على المحور الأفقي، فنحصل بذلك على، الربيع أوالعشير أوالمؤين.

عاشرا:العلاقة بين الوسيط الربيعيات، العشيريات والمؤينات :إذا حسبت ربيعيات وعشيرات ومؤينات مجموعة من البيانات، فإننا نجد العلاقة التالية بينها:

$$Mé = Q_2 = D_5 = C_{50}$$
$$Q_1 = C_{25}$$
$$Q_3 = C_{75}$$

مثال4-28 : أوجد الربيع الأول والثالث، والعشير الخامس، والمؤين العاشر والخمسون و الوسيط، للبيانات التالية :

i	الفئات	f_i
1	5-10	3
2	10-15	5
3	15-20	10
4	20-25	6
5	25-30	4
6	30-35	4
مج		**32**

جدول4-25

وذلك بإستخدام :

1-الطريقة الأولى لإيجاد الوسيط في حالة البيانات المبوبة التي طول فئاتها أكبر من الصفر (معادلة رقم 4-40).

2- الطريقة البيانية.

الإجابة : 1-المعادلة 4-40 المطلوب إستخدامها هي :

$$Mé = d + \frac{c - f_{i-1}^{+}}{f_{i+1}^{+} - f_{i-1}^{+}} \times L$$

غير أنه ينبغي إستبدال ترتيب الوسيط، بترتيب المقياس المرغوب في حسابه، ولأجل ذلك نوجد التكرار المتجمع الصاعد ، وهو كما يلي:



i	الفئات	f_i	الحدود الدنيا	↗
1	10-5	3	أقل من10	3
2	15-10	5	أقل من15	8
3	20-15	10	أقل من20	18
4	25-20	6	أقل من25	24
5	30-25	4	أقل من30	28
6	35-30	4	أقل من35	32
مج		**32**		

جدول4-26

أ- الربيـــع الأول :

ترتيب الربيع الأول : بتطبيق المعادلة رقم 4-58 نجد: $c_1= 8$

ومنه تكون قيمـــة الربيـــع الأول هـــي :

$$Q_1 = 15 + \frac{8-8}{18-8} \times 5 = 15$$

ب-الربيـــع الثـــالث :

ترتيـــب الربيـــع الثـــالث : بتطبيـــق المعادلـــة 4-60 نجـــــد: $c_3=24$

ومنه تكون قيمة الربيـــع الثـــالث هـــي :

$$Q_3 = 25 + \frac{24-24}{28-24} \times 5 = 25$$

جـ-العشـــير الخـــامس :

ترتيـــب العشـــير الخـــامس : بتطبيـــــق المعادلـــــة 4-62 نجـــــد :

$c_5=16$ ومنه تكون قيمة العشـــــير الخـــامس هـــي :

$$D_5 = 15 + \frac{16-8}{18-8} \times 5 = 19$$

د-المؤيـــن العاشـــر :

ترتيب المؤين العاشر : بتطبيق المعادلة 4-64 نجد: $c_{10}=3.2$ ومنه تكـــون قيمة المؤين العاشر هي :



$$C_{10} = 10 + \frac{3.2 - 3}{8 - 3} \times 5 = 10.2$$

هـ- المؤيـــن الخمســون :

ترتيـــب المؤيـــن الخمســون : بتطبيـــــق المعادلـــــة 4-64 نجـــــد:

$c_{50}=16$، و منه تكون قيمـــة المؤيـــن الخمســـون هـــي :

$$C_{50} = 15 + \frac{16 - 8}{18 - 8} \times 5 = 19$$

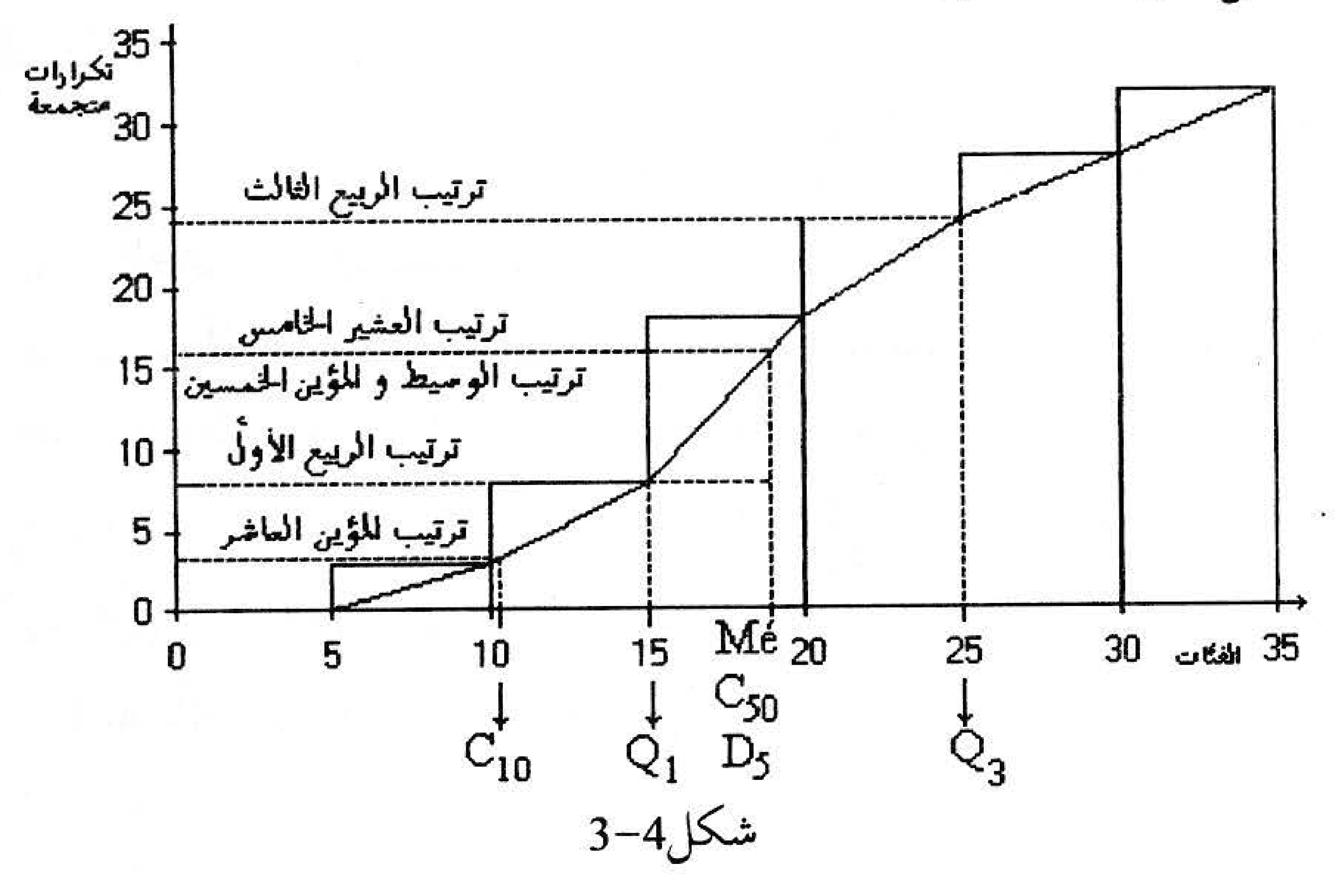
و-الوســـيط :

ترتيب الوســـيط هـــو : c=16

ومنه تكون قيمة الوســـيط هـــي :

$$Mé = 15 + \frac{16 - 8}{18 - 8} \times 5 = 19$$

2- بتطبيـــق فكـــرة إيجـــاد الربيعيـــات والعشـــيرات والمئينـــات بيانيـــا ومن خـــلال الشـــكل4-3 أدنـــاه، نحصـــل تقريبـــا علـــى نفـــس القيـــم المحصل عليها أعـــلاه.



شكل4-3



تمارين

تمرين1: البيانات التالية تظهر الأجورالأسبوعية لعمال مصنع ما بمئات الدينارات.

34	13	54	24	35	30	20	52
47	45	31	10	18	22	33	45
35	34	28	24	14	17	25	50
30	31	36	23	50	46	45	41

المطلوب:

1- أوجد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

2- بوب البيانات أعلاه في جدول تكراري مستمر بجعل طول الفئة :500= L

3- من الجدول المحصل عليه في المطلوب2، أوجد الوسط الحسابي وقارنه بالوسط الحسابي المحصل عليه من المطلوب 1.

4- أوجد الوسيط قبل التبويب وبعده.

5- أوجد المنوال قبل التبويب وبعده.

6- أوجد الوسط الهندسي، الوسط التربيعي قبل التبويب وبعده.

7- أوجد:- الربيعيان الأول و الثالث -المؤي الخامس والعشرون

- المؤي الخمسون - المؤي الخامس والسبعون - العشير الخامس وذلك بعد التبويب، باستخدام المعادلة 4-40، وباستخدام الطريقة البيانية.

8- قارن النتائج المحصل عليها من السؤال 7.

تمرين 2: الجدول التالي يظهر توزيع عمال مصنع ما حسب الأجور الأسبوعية، بمئات الدينارات.

الأجور	32-30	34-32	36-34	38-36	40-38	42-40	44-42
العمال	10	20	15	45	30	16	7

المطلوب:



1- أوجد متوسط الأجور باستعمال طريقة الوسط الفرضي.

2- أوجد كل مقاييس النزعة المركزية الأخرى.

3- اثبت حسابيا تساوي كل من الوسيط، العشير الخامس، المؤين الخمسون.

تمرين3: البيانات التالية تظهر توزيع سكان الجزائر المقيمين، حسب فئات الأعمار و الجنس سنة 2000 بالآلاف.

المصدر: الجزائر بالأرقام العدد31 الديوان الوطني للإحصائيات/ www.ons.dz

الفئة/سنة	إناث	ذكور	الفئة/سنة	إناث	ذكور
0-4	1495	1534	45-49	611	626
5-9	1720	1799	50-54	447	441
10-14	1860	1933	55-59	362	346
15-19	1817	1890	60-64	334	316
20-24	1571	1617	65-69	283	267
25-29	1331	1352	70-74	194	185
30-34	1136	1149	75-79	115	112
35-39	918	930	80 فأكثر	125	112
40-44	744	751	مجموع	**15026**	**15360**

المطلوب:

1- قدم هذه البيانات في جدول تكراري مستمر بجعل طول الفئة: 10 =L

2- من الجدول المحصل عليه قم بما يلي:

أ- أوجد الوسط الحساب لأعمار كل من الذكور والإناث.

ب- أوجد الوسيط و المنوال. ج- قارن المقاييس المحصل عليها. ماذا تستنتج.

د- أوجد وسيط الأعمار باستعمال الطريقة البيانية.

4- قارن النتائج وقدم الإستنتاج.



تمريـــن 4: البيانـــات التاليـــة تظـــهر العمـــــر المتوســـط لأول زواج حســـب الجنـــس والولايـــة في الجزائـــر، حســـب مصـــادر الديـــوان الوطني للإحصائيـــات.

الولاية	ذكور	إناث
أدرار	26.2	20.1
الشلف	25.0	22.5
الأغواط	27.3	22.3
أ.بواقي	27.4	24.4
باتنة	27.0	23.5
بجاية	26.6	22.1
بسكرة	27.0	23
بشار	28.0	22.9
البليدة	28.7	24.7
البويرة	26.7	22.5
تمنراست	27.3	20.4
تبسة	27.2	23

الولاية	ذكور	إناث
تلمسان	28.6	24
تيارت	26.6	22
ت.وزوو	27.6	23.3
الجزائر	30.7	27.2
الجلفة	24.9	19.6
جيجل	27.7	24.1
سطيف	26.4	22.6
سعيدة	27.4	22.5
سكيكدة	28.8	25.2
س.بلعباس	28.5	23.3
عنابة	29.5	25.9
قالمة	28.6	25.5

الولاية	ذكور	إناث
قسنطينة	29.1	26.2
المدية	26.1	22.0
مستغانم	27.0	23.0
المسيلة	25.7	21.1
معسكر	27.6	22.9
ورقلة	26.3	21.1
وهران	29.2	25.1
البيض	27.4	21.8
اليزي	27.5	20.4
ب.بوعرير	25.5	21.6
بومرداس	29.2	25.0
الطارف	28.0	24.6

الولاية	ذكور	إناث
تندوف	27.9	20.8
تسمسيلت	26.9	21.1
الواد	25.8	20.6
خنشلة	27.4	23.9
س.اهراس	27.6	23.9
تيبازة	28.1	24.7
ميلة	27.4	24.4
ع. الدفلى	26.8	22.8
النعامة	27.8	22.5
تموشنت	29.0	24.6
غرداية	25.8	21.2
غليزان	26.4	22.2

المطلـــوب:

1-أوجد المتوســـط الوطـــني لســـن أول زواج بالنســـبة للجنســـين.

2-أوجـــد متوســـط عمـــر أول زواج للجنســـين في المـــدن الكـــــبرى: وهران، الجزائر، قســـــنطينة، عنابـــة.

3-أوجد متوســـــط عمـــر أول زواج للجنســـين في كـــل مـــن ولايـــات الشمال، ولايات الجنـــوب. مـــاذا تلاحـــظ؟.

تمرين5: إذا كان : $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 10 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = -4$

إحسب نتائج العبـــارات التاليـــة:

أ- $\sum_{i=1}^{6}(2x_i + 5)$ ب- $\sum_{i=1}^{6} x_i (x_i - 1)$ ج- $\sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{i=1}^{6} (x_i - 5)^2$



تمرين6: إذا كانت لدينا مجموعة من القيم وسطها معلوم، إثبت أنه:

1-إذا طرح مقدار ما C من كل قيمة من تلك القيم فإن الوسط الحسابي للقيم الجديدة يكتب كما يلي : $\bar{\bar{x}} = \bar{x} - C$

2- إذا قسمت كل قيمة من تلك القيم على العدد C، فإن الوسط الحسابي

للقيم الجديدة يكتب كما يلي : $\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{C}$

حيث: $\bar{x}$: الوسط الحسابي للقيم الأصلية. $\bar{\bar{x}}$: الوسط الحسابي للقيم الجديدة.

وذلك في حالتي البيانات المبوبة وغير المبوبة.

تمرين7: إذا كانت لدينا مجموعتين من البيانات الأولى حجمها N_1 والثانية حجمها N_2، اثبت انه اذا دمجت المجموعتين فإن الوسط الحسابي للمجموعة الجديدة يكتب كما يلي:

$$\bar{x}' = \frac{N_1.\bar{x}_1 + N_2.\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

حيث $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ الوسطين الحسابيين للمجموعة الأولى و الثانية على التوالي.



الفصل الخامس
مقاييس التشتت

لتوضيح مفهوم التشتت نعطي المثال التالي :

مثال5-1: قسمان دراسيان، كل قسم يحتوي على 5 طلبة، وكانت النتائج البيداغوجية لطلبة القسمين كما يلي :

القسم الأول	10	12	13	10	10
القسم الثاني	3	20	20	5	7

لو أخذنا الوسط الحسابي لنتائج القسمين لوجدناهما متساويين حيث:

$$\bar{x}_1 = \frac{55}{5} = 11$$
$$\bar{x}_2 = \frac{55}{5} = 11$$

يعني هذا أن المستوى البيداغوجي للقسمين متساو، غير أنه لو لاحظنا علامة كل طالب لوجدنا أن كل طلبة القسم الأول ناجحون، بينما لم ينجح في القسم الثاني سوى طالبين، فالحقيقة هي اذن أن مستوى القسمين غير متساو على الرغم من أن الوسط الحسابي لنتائجهما متساو، ولو لاحظنا الفرق بين أكبر علامة وأصغر علامة في القسم الأول لوجدناها:(13-10)= 3، بينما يقدر الفرق بين أكبرعلامة وأصغرعلامة في القسم الثاني بـ☹ 20-3) =17، أما أكبر إنحراف عن الوسط الحسابي في القسم الأول فهو : (13-11) = 2، وأكبر إنحراف عن الوسط الحسابي في القسم الثاني هو: (20-11) =9 ويعني هذا أن نتائج القسم الثاني أكبرتشتتا أي أكبر تباعدا عن بعضها و عن وسطها الحسابي، على عكس نتائج القسم الأول، فانها أقل تشتتا، والنتيجة هي أن الوسط الحسابي (وبقية مقاييس النزعة



المركزية)، غير كافية وحدها لإعطاء خلاصة كافية عن البيانات، وذلك لأن الكثير منها يتأثر بالقيم المتطرفة، لذلك لابد من دراسة مدى تباعد القيم حتى نتمكن من إستخلاص نتائج أكثر واقعية، ومن هنا جاءت أهمية دراسة التشتت.

تعريف 5-1: التشتت هو مدى تباعد مجموعة القيم عن بعضها البعض أوعن القيمة التي تمثل مركز تلك المجموعة، ويقاس بعدة مقاييس هي :

أولا: مدى التغير :

تعريف5-2: يعرف مدى التغير أو المدى لأية مجموعة من القيم بأنه الفرق بين أعظم قيمة وأدنى قيمة من مجموعة القيم، سواء كانت هذه القيم مبوبة أو غير مبوبة، وهو معطى بالمعادلة 2-3 في الفصل الثاني، أي:

$$W=X_{Max}-X_{Min} \qquad 1-5$$

مثال5-2: من المثال 5-1 أوجد مدى التغير.

أكبر علامة في القسم الأول هي : 13 بينما أدنى علامة هي : 10 ومنه يكون مدى التغير للقسم الأول هو :

$$W_1=13-10=3$$

أكبر علامة في القسم الثاني هي : 20 بينما أدنى علامة هي : 3 ومنه يكون مدى التغير للقسم الثاني هو :

$$W_2=20-3=17$$

تعكس النتائج ما ذهبنا اليه في مقدمة هذا الفصل، وهو أن بيانات القسم الأول أقل تشتتا وبالتالي فان وسطها الحسابي يمثلها تمثيلا مقبولا، بينما بيانات القسم الثاني، متباعدة أي أكثر تشتتا وبالتالي فإن وسطها الحسابي لايمثلها تمثيلا جيدا.

غير أن مدى التغير يفقد أهميته نتيجة للعيوب التالية :



*أنـه يتـأثر بـالقيم الشـاذة لكونـه لايـأخذ في الحسبان جميـع القيـم، فالبيانـات التاليـة مثـلا: 3 ، 20 ، 25 ، 20 ، 23 ، 22 ، 90، جلـها يـتراوح بـين 20 و25، غـير أن مـدى تغيرهـا كبـير جـدا وهـو:W=90-3=87، فـالمدى في مثـل هـذه الحـالات لامعنى له، لأن تـأثره واضـح بـالقيمتين الشـاذتين وهمـا : 3 و90.

* مـدى التغـير لايمكـن إسـتخدامه في حالـة التوزيعـات التكراريـة المفتوحـة، لأن حديـها الأعلـى و الأدنى يكونـا غـير معلومـين.

ثانيـا: الإنحـراف المتوسـط :

تعريـف5-3: الإنحـراف المتوسـط هـو الـوسط الحسـابي لفروقـات القيـم عـن وسـطها الحسـابي بالقيمـة المطلقـة، وتختلـف طريقـة حسابه باختلاف طريقـة تقـديم البيانـات :

1-البيانات غير المبوبة : إذا كانت لدينا البيانات : $x_1 \ , \ x_2 , x_3,......., x_n$

فان إنحرافها المتوسط يعطى بالمعادلة التالية :

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N} \qquad 2-5$$

مثـال5-3: البيانـات التاليـة خاصـة بـالأجور الأسـبوعية لعمـال مؤسسـة مـا، بـآلاف الدينـارات، والمطلـوب إيجـاد إنحرافـها المتوسـط.

50	70	80	50	60	50	70	50	70	90
70	100	50	80	60	70	50	60	60	80

الإجابـة:

إيجاد الإنحراف المتوسط يتطلـب أولا إيجـاد الوسـط الحسـابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{1320}{20} = 66 \ 10^3 \text{ دج}$$

تطبيق المعادلة 5-2 يتطلب ايجاد الفروقات عن الوسط الحسابي كما هي واضحة أدناه :

-16	4	14	-16	-6	-16	4	-16	4	24
4	34	-16	14	-6	4	-16	-6	-6	14

ومعلوم أن مجموع هذه القيم معدوم، حسب أول خاصية من خصائص الوسط الحسابي، لذلك يتم أخذ القيم المطلقة لإيجاد الإنحراف المتوسط، كما هو واضح في المعادلة 5-2، وبالتالي يكون :

$$e = \frac{240}{20} = 12.10^3$$

أي الإنحراف المتوسط هو: 10.12^3 د ج.

2- الإنحراف المتوسط للبيانات المبوبة : إذا كانت لدينا البيانات: x_1 , x_2 , x_3,......., x_n، تكراراها على التوالي : f_1 , f_2 , f_3 , ... , fn فإن إنحرافها المتوسط يعطى بالمعادلة التالية:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 3-5$$

مثال5-4: بوب بيانات المثال 5-3 في جدول تكراري، ثم احسب إنحرافها المتوسط.

الإجابة: بتطبيق مباديء التبويب كما هي واردة في الفصل الثاني نحصل على الجدول التالي :

i	x_i	f_i
1	50	6
2	60	4
3	70	5
4	80	3
5	90	1
6	100	1
مج		20

جدول5-1



لإيجاد الإنحراف المتوسط نحسب أولا الوسط الحسابي، ثم نطبق المعادلة 5-3 .بمساعدة الجدول 5-2 أدناه:

i	x_i	f_i	$x_i f_i$	$\|(x_i - \bar{x}\|f_i$
1	50	6	300	96
2	60	4	240	24
3	70	5	350	20
4	80	3	240	42
5	90	1	90	24
6	100	1	100	34
مج		**20**	**1320**	**240**

جدول5-2

الوسط الحسابي هو: $\bar{x} = \dfrac{1320}{20} = 66.10^3$

و يكون الإنحراف المتوسط كما يلي :

$$e = \frac{240}{20} = 12.10^3 \text{ دج}$$

تجدر الاشارة الى أنه في حالة البيانات التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، يتم استخدام مراكز الفئات c_i، وتكون معادلة الإنحراف المتوسط كما يلي :

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n} |c_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 4-5$$

إن الخاصية الإيجابية للإنحراف المتوسط هي أنه يأخذ في الحسبان جميع القيم، لذلك فدرجة تأثره بالقيم الشاذة ضعيفة، على عكس مدى التغير كما رأينا، و هو لا يحقق بعض شروط يول، و من ذلك أنه لايخضع للعمليات الجبرية، إذ أن مجموع إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي يكون معدوما، لذلك تم إستخدام القيمة المطلقة.



ما تجدر الإشارة اليه، هو أنه يمكن ايجاد الإنحراف المتوسط بالنسبة لمختلف مقاييس النزعة المركزية الأخرى، غير أن ذلك نادر الإستخدام.

ثالثا: التباين، الإنحراف المعياري و العزوم :

1- التباين : لتفادي عيب الإنحراف المتوسط وهو عدم الخضوع للعمليات الجبرية، فانه يتم إيجاد متوسط مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي، ويسمى هذا المتوسط بالتباين.

أ- تباين البيانات غير المبوبة :

تعريف5-4: إذا كانت لدينا البيانات: $x_1 , x_2 , x_3,......., x_n$ فإن تباينها يعرف كما يلي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad 5-5$$

مثال5-5 : أوجد تباين بيانات المثال 5-3.

بتطبيق المعادلة 5-5 نجد :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{4080}{20} = 204$$

ب-تباين البيانات المبوبة :

تعريف5-5: إذا كانت لدينا البيانات : $x_1 , x_2 , x_3,......., x_n$، تكراراها على التوالي : $f_1 , f_2 , f_3 , ..., f_n$ فإن تباينها يعرف كما يلي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 6-5$$

مثال5-6: أوجد تبـــاين بيانـــات الجـــدول 5-1.

بتطبيق المعادلة 5-6 وبمســـاعدة الجـــدول التـــالي :

i	x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1	50	6	300	1536
2	60	4	240	144
3	70	5	350	80
4	80	3	240	588
5	90	1	90	576
6	100	1	100	1156
مج		**20**	**1320**	**4080**

جدول5-3

نجد :
$$\sigma^2 = \frac{4080}{20} = 204$$

في حالة البيانات التي طول فئاتهـــا أكـــبر مـــن الصفـــر يتـــم اســـتبدال : x_i بمراكز الفئـــات وذلـــك في المعادلـــة 5-6.

إن التباين يـــأخذ في الحســـبان جميـــع القيـــم وهـــو يخضـــع للعمليـــات الجبرية، اذ يمكن ايجاد قيمته أيضـــا عـــن طريـــق المعـــادلتين التـــاليتين :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \qquad 7-5$$ في حالة البيانـــات غـــير المبوبة.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2 \qquad 8-5$$ في حالة البيانات المبوبة.

أي أنه عبارة عن مربع الوسط التربيعي منقوصا منه مربع الوســـط الحســـابي:

$$\sigma^2 = Q^2 - \bar{x}^2$$

و يمكـــن اثبـــات ذلـــك رياضيـــا بفـــك المعـــادلتين 5-5 و 5-6 علـــى التوالي و إجراء بعـــض التعويضـــات.



عيب التباين الوحيد هو أن قيمته تكون كبيرة و وحدات قياسه تكون مربعة، لأنه يأخذ مربعات القيم في الحساب، الشيء الذي لا يجعله يعطي نظرة في تمام الوضوح حول مدى تشتت القيم، لذلك يتم في غالب الأحيان إستبداله بالإنحراف المعياري كما هو معرف أدناه.

2- الإنحراف المعياري : الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للوسط الحسابي لمربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي، أي هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ويعرف رياضيا حسب طبيعة البيانات كما يلي :

أ- الإنحراف المعياري للبيانات غير المبوبة :

تعريف5-6 : إذا كانت لدينا البيانات: $x_1 , x_2 , x_3,......., x_n$ فإن إنحرافها المعياري يعطى كما يلي :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}} \qquad 9-5$$

وعلى هذا يكون الإنحراف المعياري لبيانات المثال 5-3 هو :

$$\sigma = \sqrt{204} = 14.28.10^3 \quad \text{دج}$$

ب- الإنحراف المعياري للبيانات المبوبة :

تعريف5-7:إذا كانت لدينا البيانات : $x_1 , x_2 , x_3,......., x_n$، تكراراتها على التوالي :$f_1 , f_2 , f_3 , ..., f_n$ فإن إنحرافها المعياري يعطى بالمعادلة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} \qquad 10-5$$



مثال5-7: أوجد الإنحـــراف المعيـــاري لبيانـــات الجـــدول 5-1.

بما أن الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، لذلـــك يكـــون:

$$\sigma = \sqrt{204} = 14.28.10^3 \quad \text{دج}$$

ج- خصـــائص الإنحـــراف المعيـــاري : مـــن أهـــم خصـــائص الإنحراف المعياري مـــا يلـــي:

* من أهم مميزاتـــه، أنـــه يـــأخذ في الحســـبان جميـــع القيـــم، كمـــا أن قيمتـــه صغـــيرة وبالتـــالي يمكـــن أن تعطـــي خلاصـــة واضحـــة عـــن مدى تباعد القيـــم، اذ كلمـــا كـــانت هـــذه القيمـــة صغـــيرة دل ذلـــك على أن القيم ليســـت متبـــاعدة عـــن الوســـط الحســـابي وبالتـــالي فـــهي أقل تشتتا و وســـطها الحســـابي يمثلـــها تمثيـــلا جيـــدا. و عمومـــا تعتـــبر القيم غير مشتتة إذا كـــان الإنحـــراف المعيـــاري يمثـــل أقـــل مـــن 20 % من وسطها الحســـابي.

* يمكـــن حســـاب الإنحـــراف المعيـــاري بالإعتمـــاد علـــى الوســـط التربيعي كمـــا هـــو معـــرف في مقـــاييس النزعـــة المركزيـــة بإســـتخدام المعـــادلتين:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \quad \text{في حالة البيانات غير المبوبة.} \qquad 11-5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2} \quad \text{في حالة البيانات المبوبة.} \qquad 12-5$$

و يمكن إثبات ذلك انطلاقا من المعادلتين الأساسيتين 5-9 و 5-10.

* جـــذر متوســـط مربعـــات إنحرافـــات القيـــم عـــن وســـطها الحســـابي (الإنحـــراف المعيـــاري)، هـــو أصغـــر مـــن جـــذر متوســـط



مربعات إنحرافات تلك القيم عن أية قيمة أخرى مهما كانت تختلف عن الوسط الحسابي لها أي:

$$\sqrt{\frac{(x_i-\overline{x})^2}{N}<\frac{(x_i-Z)^2}{N}} \qquad \forall\ \overline{x}\neq Z \qquad 13-5$$

في حالة البيانات غير المبوبة.N

$$\sqrt{\frac{(x_i-\overline{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}<\frac{(x_i-Z)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} \qquad \forall\ \overline{x}\neq Z \qquad 14-5$$

في حالة البيانات المبوبة.

وهذا مهما كان الوسط الحسابي للبيانات يختلف عن القيمة Z و يتم إثبات ذلك بصفة مشابهة لإثبات الخاصية الرابعة من خواص الوسط الحسابي كما هي واردة في الفصل الثاني.

* يمكن حساب الإنحراف المعياري بإستعمال وسط فرضي Z عن طريق المعادلتين التاليتين :

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z)^2}{N}-(\bar{x}-Z)^2} \qquad 15-5$$

في حالة البيانات غير المبوبة.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}-(\bar{x}-Z)^2} \qquad 16-5$$

في حالة البيانات المبوبة.



ويمكن إثبات ذلك بفك المعادلتين، إذ نجدهما مساويتين للمعادلتين 5-9 و5-10 على التوالي.

* اذا كانت لدينا عينتين الأولى حجمها : N_1 وإنحرافها المعياري σ_1 ، والثانية حجمها :N_2 وإنحرافها المعياري σ_2، ولهما نفس الوسط الحسابي، فإن انحرافهما المعياري عند دمجهما يعطى على النحو التالي :

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2}} \qquad 17-5$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا أيضا.

ويظهر إذن أن الإنحراف المعياري يوفر جميع شروط يول و هو يعتبر بذلك أفضل مقياس من مقاييس التشتت، بحيث تعتمد عليه معظم الدراسات الإحصائية.

3- العزوم:

تعريف4-8: اذا كانت لدينا القيم: $x_1 , x_2 , x_3 ... x_n$ حيث N عدد القيم، فان العبارة:

$$\bar{x}_q = \frac{x_1^q + x_2^q + x_3^q \; .... \; x_n^q}{N} \qquad 18-4$$

تسمى بالعزم من الدرجة q.(حيث q عدد طبيعي).

اذا كانت q=1 يكون العزم مساويا للوسط الحسابي.

تعريف4-9: يسمى العزم من الدرجة q بالنسبة للوسط الحسابي، **بالعزم المركزي**، ويعرف كما يلي :

$$m_q = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^q}{N} \qquad 19-4$$

في حالة البيانات غير المبوبة.



$$m_q = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^q f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad 20-4$$

في حالة البيانات المبوبة.

اذا كان : $q=1$ يكون : $mq=0$

اذا كان : $q=2$ يكون : $mq=\sigma^2$ ، أي التباين.

ملاحظة: للتطبيق أنظر مثال5-3 من الفصل الموالي.

رابعا: الانحراف الربيعي:

تعريف4-11: إذا كانت لدينا بيانات إحصائية ربيعها الأول هو Q_1 وربيعها الثالث هو Q_3 ، فإن إنحرافها الربيعي يعطى كما يلي:

$$VQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad 21-4$$

خامسا: معاملات التشتت النسبية: من عيوب مقاييس التشتت أن وحدات قياسها تأخذ نفس وحدات قياس المعلومات الأولية، لذلك لايمكن إستخدامها في مقارنة مدى تشتت ظاهرتين مختلفتين أو أكثر، فعلى سبيل المثال، التشتت في ظاهرة النفقات في الجزائر يقاس بالدينار الجزائري بينما في دولة أخرى يقاس بعملة تلك الدولة ، لذلك لايمكن المقارنة بين تشتت الظاهرتين، الشيء الذي تطلب ضرورة إيجاد مقاييس نسبية تسمح بالمقارنة ومنها معامل الاختلاف أومعامل التغير والإنحراف الربيعي النسبي.

1- معامل الاختلاف:

تعريف4-10: يعرف معامل الاختلاف بأنه النسبة المائوية للإنحراف المعياري على الوسط الحسابي، أي :



$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \qquad 22-4$$

بما أن وحدات قياس كل من الإنحراف المعياري و الوسط الحسابي واحدة، لذلك تختزل من بسط ومقام المعادلة 4-22، ويكون بذلك CV قيمة نسبية.

2-الإنحراف الربيعي النسبي : و هو يستخدم في تحديد مدى تماثل التوزيعات، ويعطى كما يلي :

$$VQP = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \qquad 23-4$$

سادسا: العلاقة بين بعض مقاييس التشتت: إذا كانت لدينا بيانات تكرارية ذات إلتواء ضعيف (انظر الفصل الموالي)، فإنه ثبت تجريبيا صحة العلاقات التالية:

الانحراف المتوسط = أربعة أخماس الانحراف المعياري، أي:

$$e = \frac{4}{5}\sigma \qquad 24-4$$

الانحراف الربيعي = ثلثي الإنحراف المعياري، أي :

$$VQ = \frac{2}{3}\sigma \qquad 25-4$$



تمارين.

تمرين1: عرف التشتت وحدد مقاييسه . ماهو المقياس الأكثر إستخداما؟وضح لماذا.؟

تمرين2: البيانات التالية تظهر نتائج أحد الأقسام في مقياس الإحصاء:

6	2	10	12	4	6	10	4	8	2
2	8	12	4	12	2	4	6	10	4

المطلوب: أوجد المقاييس التالية : - الإنحراف المتوسط. -الإنحراف المعياري. - معامل الإختلاف -الإنحراف الربيعي - الإنحراف الربيعي النسبي - العزم المركزي من الدرجة 2و 3.

تمرين3: بوب بيانات التمرين 2 ، وأجب على كل مطاليبه.

تمرين4: مصنع ينتج نوعين من العجلات ، النوع الأول متوسط المسافة التي يهتلك فيها هي : 10000 كلم بإنحراف معياري يبلغ 2000 كلم، أما النوع الثاني فمتوسط المسافة التي يهتلك فيها هي : 11000 كلم بإنحراف معياري يقدر بـ: 1000 كلم ، هل يمكن القول أن النوع الثاني أفضل من النوع الأول.

تمرين5: الجدول التالي يبين توزيع عينة من مساكن أحد الأحياء حسب عدد الغرف.

7	6	5	4	3	2	1	عدد الغرف x_i
3	5	12	30	25	20	5	عدد المساكن f_i

المطلوب :

1- أوجد كل مقاييس التشتت.

2- أوجد معامل الإختلاف.

3- أوجد العزم المركزي من الدرجة 2 و 4



تمرين6: البيانات التالية تظهر توزيع عمال مصنعين متشابهين الأول في الجزائر و الثاني في واشنطن حسب الأجور الشهرية التي يتقاضونها.

توزيع الأجور الأسبوعية للمصنع1 بآلاف الدينارات

الأجور	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	18-16
عدد العمال	10	35	40	64	35	10	5	1

توزيع الأجور الأسبوعية للمصنع2 بآلاف الدولارات

الأجور	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	8-16
عدد العمال	20	35	50	39	30	20	4	2

المطلوب:1-أوجد كل مقاييس التشتت للمصنعين. 2-أي المصنعين أفضل توزيعا. إشرح.

تمرين7:اثبت أنه يمكن كتابة:

أ- الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة على النحو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ب-تباين البيانات المبوبة على النحو:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2$$

ج- الإنحراف المعياري للبيانات غير المبوبة على النحو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - Z)^2}{N} - (\bar{x} - Z)^2}$$

حيث Z قيمة فرضية.



د- الإنحراف المعياري للبيانات المبوبة على النحو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Z)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - (\bar{x} - Z)^2}$$

حيث Z قيمة فرضية.

تمرين8: إذا كانت لدينا بيانات ذات إلتواء ضعيف ، إنحرافها المتوسط هو 8 ، أوجد تباينها.

تمرين9: اذا كانت لدينا عينتين الأولى حجمها N_1 وإنحرافها المعياريσ_1، والثانية حجمها N_2 وإنحرافها المعياري σ_2 ، ولهما نفس الوسط الحسابي ، أثبت أن تباينهما عند دمجهما يعطى على النحو التالي:

$$\sigma^2 = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2}$$

تمرين 10:اثبت أن التباين عبارة عن مربع الوسط التربيعي منقوصا منه مربع الوسط الحسابي أي : $\sigma^2 = Q^2 - \bar{x}^2$



الفصل السادس

أشكال التوزيعات التكرارية.

عند رسم المنحنى التكراري للبيانات نصادف عدة أنواع من الأشكال، كل شكل يوحي بطبيعة معينة لتوزيع تلك البيانات، الشيء الذي يجعل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وحدها لاتكفي لتحليلها، ومن الأشكال التي يمكن مصادفتها ما يصطلح عليه بما يلي:

*** التماثل التام. * الإلتواء. * التفرطح (الإنبساط).**

أولا: التماثل التام : قد يكون المنحنى التكراري متماثلا، بحيث يكون الشق الأيسر للشاقول الواصل بين قمة التوزيع والمحور الأفقي للمعلم، مماثلا تماما للشق الأيمن له، وفي هذه الحالة تكون نقطة تقاطع الشاقول مع المحور الأفقي للمعلم هي النقطة المركزية التامة للتوزيع، وتسمى **بنقطة التماثل**، وتكون مساوية للوسط الحسابي وللوسيط والمنوال، وتكون بالتالي ممثلة تمثيلا جيدا للتوزيع.

تعريف 6-1: إذا كانت لدينا البيانات: $x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ . \ . \ . \ x_n$ تكراراتها على التوالي: $f_1 \ , \ f_2 \ , \ f_3 \ . \ . \ f_n$، نقول أن التوزيع التكراري لهذه البيانات تام التماثل إذا توافرت الشروط التالية:

* $\bar{x} = Mé = Mo$ (1-6)

* تكرارات الفئات التي تقل عن القيمة المركزية مساوية للتكرارات التي تزيد عنها.

*** الفرق بين كل فئة و الفئة التي تليها متساو، إذا** كان L=0 ، **وأطوال الفئات متساو إذا كان L >0**

مثال 6-1: أثبت تماثل البيانات التالية :



i	x_i	f_i
1	10	2
2	12	3
3	14	5
4	16	3
5	18	2
مج		15

جدول6-1

الإجابة: لإثبات ذلك لابد أن نتأكد من شروط التماثل التام :

الشرط الأول:

* **الوسط الحسابي :**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{210}{15} = 14$$

* **الوسيط :**

ترتيب الوسيط هو:

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i + 1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

أي أن قيمة الوسيط هي التي ترتيبها 8 ومنه فان :

$$Mé = 14$$

* **المنوال** : وهو الفئة الأكثر تكرارا، ومنه يكون :

$$Mo = 14$$

وعليه فان الشرط الأول محقق، أي :

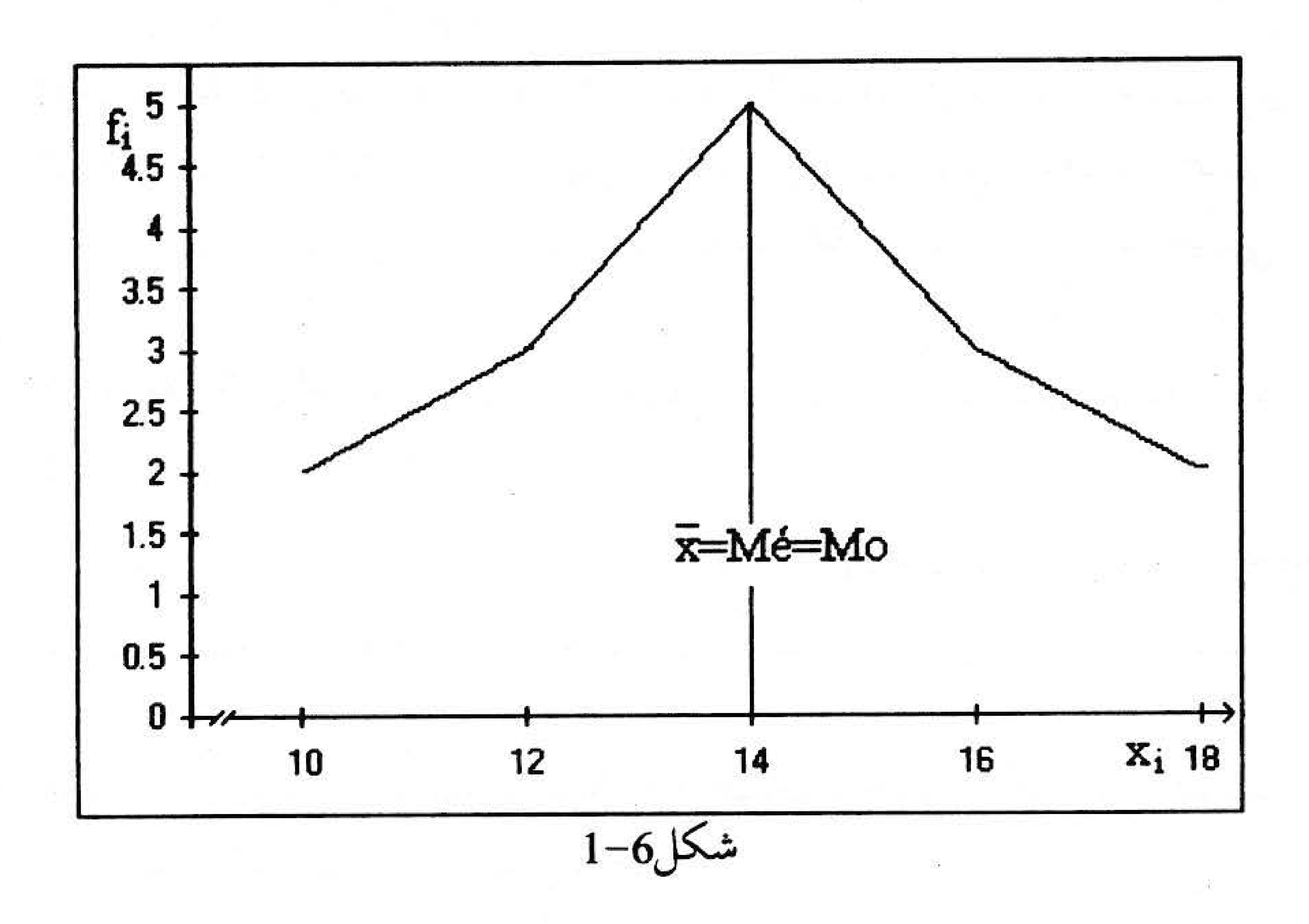
$$\bar{x} = Mé = Mo = 14$$

الشرط الثاني: التكرارات التي تقل عن الوسط الحسابي، تساوي تلك التي تزيد عنه، وهذا الشرط محقق أيضا.

الشرط الثالث : الفرق بين كل فئة والفئة التي تليها متساو ويساوي 2.



وبالتالي فإن التوزيع المشار اليه تام التماثل. وذلك ما يوضحه الشكل الموالي :



شكل6-1

إن التوزيعات التامة التماثل نادرة المصادفة في الحياة العملية، بينما التوزيعات غير المتماثلة فهي كثيرة المصادفة، وتعرف بالتوزيعات الملتوية.

ثانيا: الإلتواء: الحالة الثانية التي يمكن مصادفتها عند رسم المنحنى التكراري، هي عدم التماثل، وهي الحالة التي لا تتوافر فيها شروط التماثل كما هي موضحة أعلاه، و عنها نقول أن التوزيع ملتو إما الى اليمين أو الى اليسار.

كما سبقت الاشارة فانه عند دراسة أية ظاهرة من الظواهر، لايكفي تحليل ميل عناصر الظاهرة نحو القيمة المركزية، ولا



تباعد تلك القيم عنها، اذ لابد من دراسة درجة ميل قيم الظاهرة نحو قيمة معينة تزيد أو تقل عن قيمتها المركزية، أي لابد من دراسة إلتوائها.

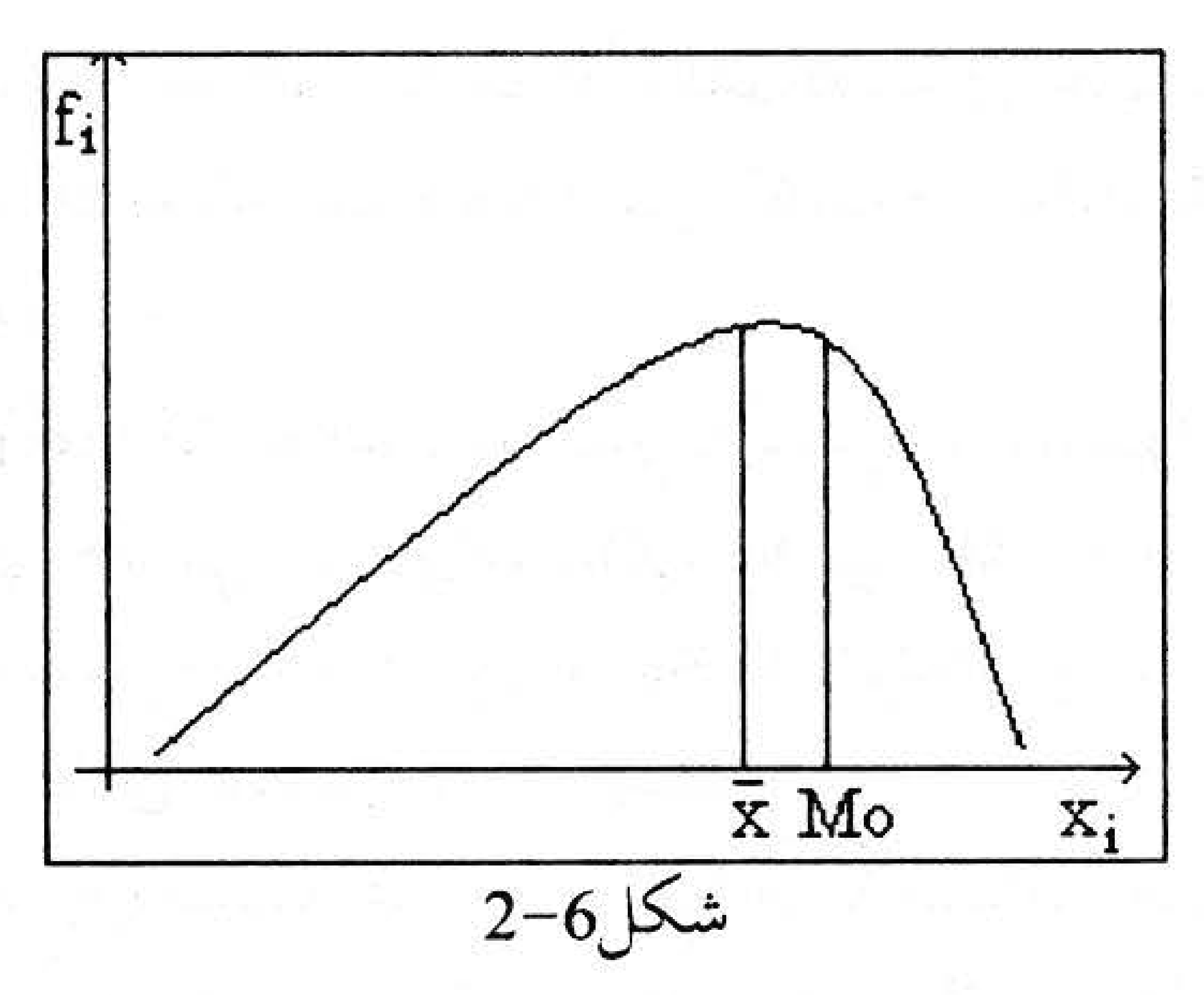
تعريف6-2: يقصد بالإلتواء إنعدام التماثل في توزيع قيم الظاهرة حول قيمتها المركزية (الوسط الحسابي)، وفيه تنتفي شروط التماثل التام، ويقاس الإلتواء بعدة مقاييس منها ما يلي :

1- **قيمة الإلتواء:** لمعرفة قيمة إلتواء ظاهرة ما يتم استخدام المعادلة التالية:

$$VA = \bar{x} - Mo \qquad 2-6$$

أي أن قيمة الإلتواء عبارة عن الوسط الحسابي منقوصا منه المنوال.

يكون التوزيع سالب الإلتواء إذا كان المنحنى التكراري ممتدا الى اليسار، كما في الشكل 6-2.

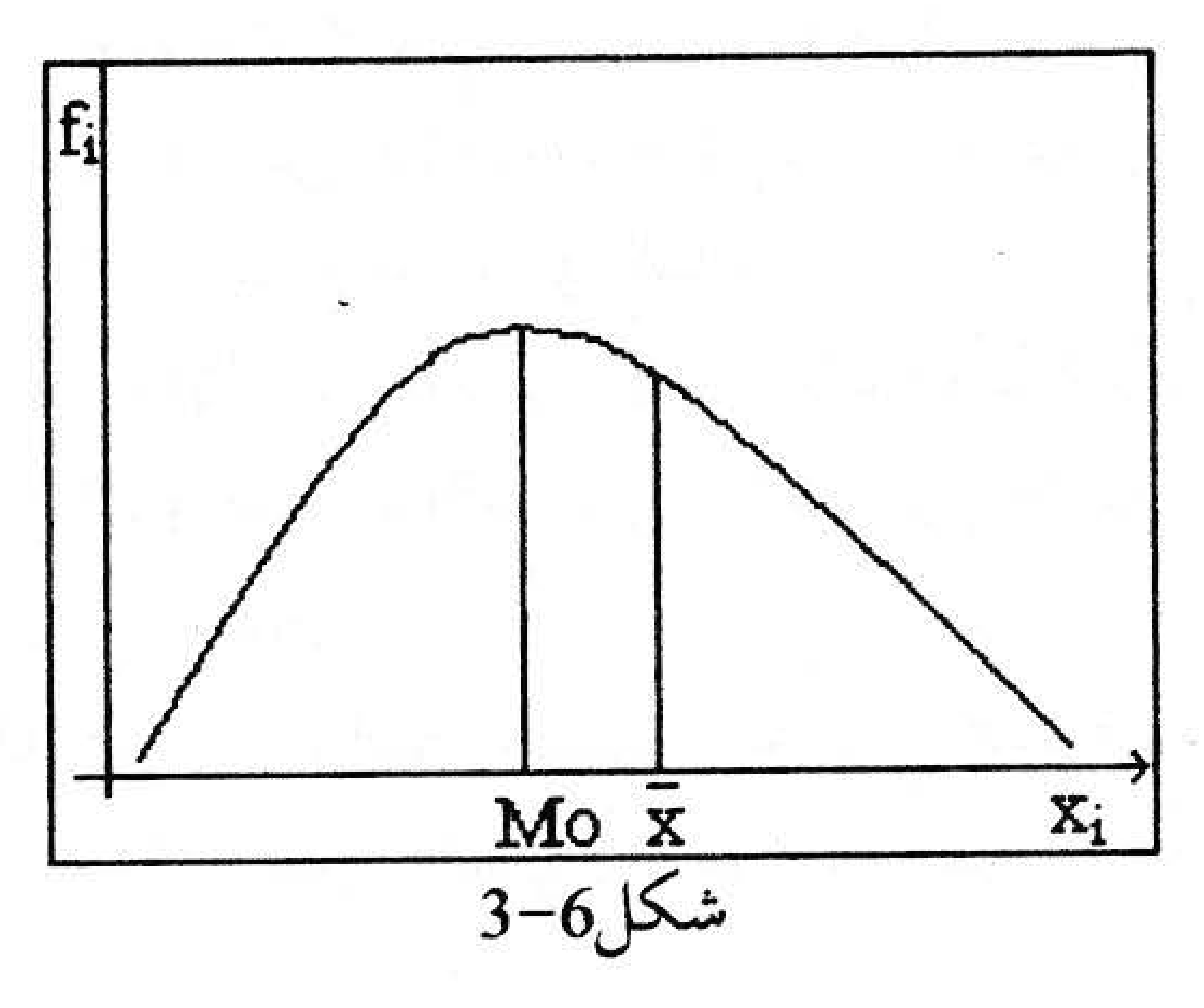


شكل6-2

$$\bar{x} < Mo \qquad 3-6$$



ويكون التوزيـع موجـب الإلتـواء إذا كـان المنحـنى التكـراري ممتـدا الى اليمين، كمـا في الشـكل 6-3.



شكل6-3

$$\bar{x} > Mo \qquad 4-6$$

2- معامل بيرسون الإلتواء: إن قيمة الإلتـواء كمـا وردت في المعادلـة 6-2، لاتسـمح بمقارنـة إلتـواء ظـاهرتين مختلفتـين أو أكـثر نتيجة لاختلاف وحدات القيـاس، لذلـك يتـم اسـتخدام مـا يسـمى بمعامل بيرسون للإلتواء الـذي يعطـى بالمعادلـة التاليـة:

$$CA = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} \qquad 5-6$$

أي قيمة الإلتواء مقسـومة علـى الانحـراف المعيـاري.

من المعادلـة 4-44 نسـتنتج :

$$\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Mé) \qquad 6-6$$

وذلـك في حالـة الإلتـواء، لذلـك فـإن معـامل بيرسـون للإلتـواء يكتب أيضا بالصيغـة :



$$CA = \frac{3(\bar{x} - Mé)}{\sigma} \qquad 7-6$$

ويكون معامل الإلتـــواء محصـــورا بـــين -1 و +1.

إذا كان موجبا دل علـــى أن التوزيـــع يمتـــد الى اليمـــين، أمـــا إذا كـــان سالبا دل على أن التوزيـــع يمتـــد الى اليســـار.

وتم تقســـيم قيمـــة الإلتـــواء علـــى الانحـــراف المعيـــاري كمـــا ســـبقت الاشارة لإخـــتزال وحـــدات القيـــاس، والتمكـــن بالتـــالي مـــن مقارنـــة إلتواء ظـــاهرتين مختلفتـــين.

مثال6-2: الجدولين التـــاليين يظـــهران توزيـــع مجموعـــة مـــن العمـــال حســـب الأجـــور الشـــهرية الـــتي يتقاضونهـــا، بـــآلاف الدينـــارات في المؤسســـتين أ و ب.

توزيع أجور عمال
المؤسسة أ

i	الأجر	عدد العمال
1	100	1
2	110	8
3	130	5
4	170	4
5	190	2
مج		20

جدول6-2

توزيع أجور عمال
المؤسسة ب

i	الأجر	عدد العمال
1	160	2
2	200	4
3	250	5
4	270	8
5	300	1
مج		20

جدول6-3

المطـــلوب:

1- أوجد قيمة الإلتـــواء لكـــل توزيـــع.

2- أوجد معـــامل بيرســـون للإلتـــواء.

3- قارن بين إلتواء التوزيعـــين، اثبـــت النتيجـــة أيضـــا بالرســـم.

الجـــواب:



1-لإيجاد قيمة الإلتواء، نوجد الوسط الحسابي و المنوال لكلا التوزيعين.

الوسط الحسابي للتوزيع الأول: (نجده باستخدام المعادلة رقم 4-3)

$$\bar{x}_1 = \frac{2690}{20} = 134.5$$

الوسط الحسابي للأجور في التوزيع الأول هو :134.5 ألف دينار.

الوسط الحسابي للتوزيع الثاني :(نجده باستخدام المعادلة رقم 4-4)

$$\bar{x}_2 = \frac{4830}{20} = 241.5$$

الوسط الحسابي للأجور في التوزيع الثاني هو : 241.5 ألف دينار.

منوال التوزيع الأول: $Mo_1 = 110$ ألف دينار.

منوال التوزيع الثاني: $Mo_2 = 270$ ألف دينار.

ومنه فإن **قيمة إلتواء التوزيع الأول** هي :

$$VA_1 = \bar{x}_1 - Mo_1 = 134.5 - 110 = 24.5$$

أي أن قيمة إلتواء التوزيع الأول هي: 24.5 ألف دينار، ويدل ذلك على أن بيانات المؤسسة الأولى ذات إلتواء شديد الى اليمين.

أما قيمة إلتواء التوزيع الثاني :

$$VA_2 = \bar{x}_2 - Mo_2 = 241.5 - 270 = -28.5$$



قيمة **إلتواء التوزيع الثاني** هي : -28.5 ألف دينار، ويدل ذلك على أن بيانات المؤسسة الثانية ذات إلتواء شديد الى اليسار.

واضح أن قيمة الإلتواء أخذت نفس وحدة قياس المعلومات الأولية، لكون كل من الوسط الحسابي والمنوال يأخذ نفس وحدة قياس المعلومات الأولية.

2-لإيجاد **معامل بيرسون للإلتواء** يتم إيجاد الانحراف المعياري للتوزيعين:

الانحراف المعياري للتوزيع الأول: (نجده باستخدام المعادلة رقم : 5-10)

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{17295}{20}} = 29.41$$

الانحراف المعياري للتوزيع الثاني:(نجده باستخدام المعادلة رقم : 5-10)

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{30455}{20}} = 39.02$$

و منه فان **معامل بيرسون لإلتواء التوزيع الأول** هو:

$$CA_1 = \frac{134.5 - 110}{29.41} = 0.83$$

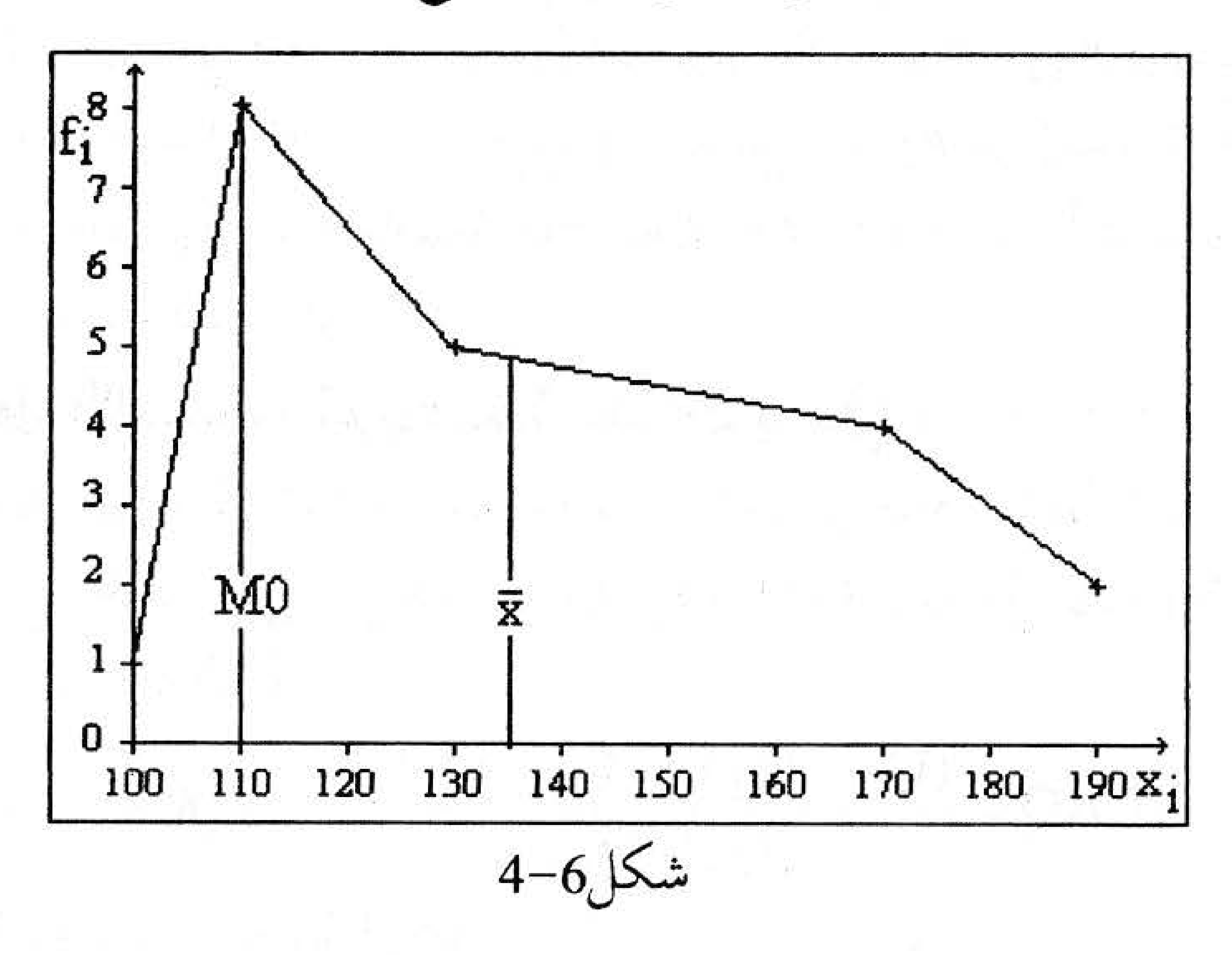
أما **معامل بيرسون لإلتواء التوزيع الثاني** فهو :

$$CA_2 = \frac{241.5 - 270}{39.02} = -0.73$$

ومنه نلاحظ أن التوزيع الثاني ملتو الى اليسار، بينما التوزيع الأول ملتو الى اليمين، وهوأكثر إلتواء من التوزيع الثاني، وذلك ما يوضحه الشكلين التاليين:

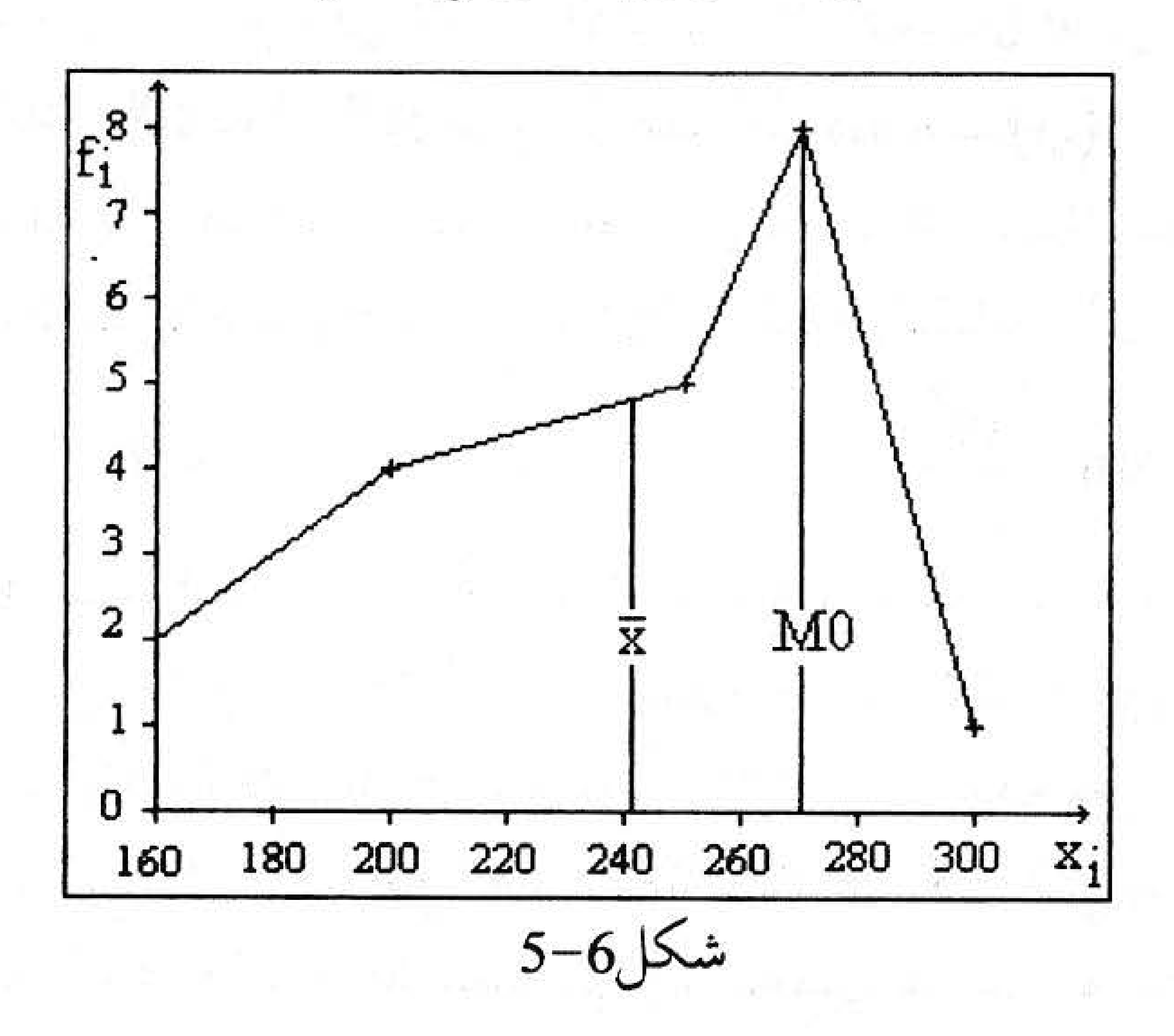


المنحنى التكراري للتوزيع الأول



شكل6-4

المنحنى التكراري للتوزيع الثاني.



شكل6-5



وهناك مقاييس أخرى للإلتواء أقل إستخداما، منها معامل الإلتواء الربيعي (معامل يول) وهو يعتمد على الربيعيات، ومعامل الإلتواء العزمي (معامل بيرسون)، وهو يعتمد على العزوم، ويتم استخدامهما خاصة في حالة وجود أكثر من منوال واحد للبيانات.

3-معامل الإلتواء الربيعي(معامل يول) :

تعريف6-3: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات ربيعياتها الأول و الثاني (الوسيط) والثالث هي على التوالي: Q_1,Q_2 , Q_3، فإن معامل الإلتواء الربيعي لها يعطى بالمعادلة التالية:

$$CAQ = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} \qquad 8-6$$

تكون قيمة هذا المعامل محصورة بين +1 و -1.

إذا كانت قيمته قريبة من الصفر يعني ذلك أن التوزيع قريبا من التناظر، وتدل إشارته الى إتجاه الإلتواء الى اليمين أو الى اليسار.

4- معامل الإلتواء العزمي (معامل بيرسون):

تعريف6-4: معامل الإلتواء العزمي هو النسبة بين العزم الثالث ومكعب الانحراف المعياري لتلك البيانات، أي :

$$CAm = \frac{m^3}{\sigma^3} \qquad 9-6$$

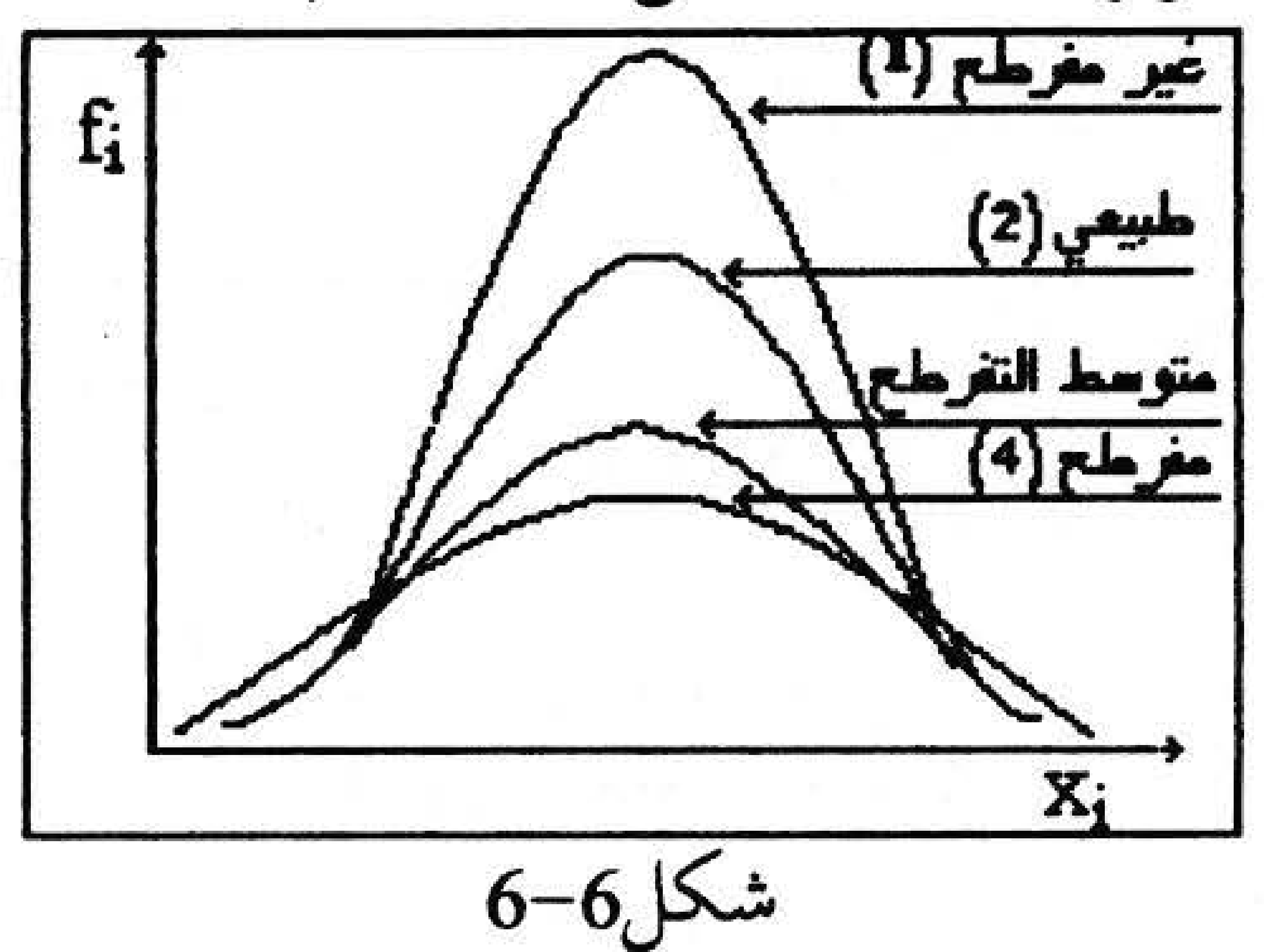
يستخدم هذا المعامل إذا كان التوزيع وحيد المنوال، وتنحصر قيمته أيضا بين +1 و -1، وتدل الإشارة على اتجاه التوزيع.

كما سبقت الإشارة فإن هذه المعاملات تستخدم لمعرفة أشكال التوزيعات، كما تستخدم أيضا لمقارنة أشكال التوزيعات لعدة ظواهر، غير أنه في هذه الحالة ينبغي إستعمال نفس القانون.

ثالثا: التفرطح (الإنبساط): كما سبق وأن رأينا، فقد يكون المنحنى التكراري متماثلا، أو ملتويا الى اليمين أو الى اليسار،



وفي كلا الحالتين قد يكون المنحنى عالي القمة (غير مفرطح) أو منبسط القمة (متوسط التفرطح أو مفرطح)، وتقاس درجة علو المنحنى بما يسمى بمعامل التفرطح، والشكل التالي يظهر مختلف أنواع المنحنيات التكرارية الممكن مصادفتها:



شكل6-6

المنحنى (1) (غير مفرطح - عالي القمة - مدبب)، يدل المنحنى على شدة تركز القيم حول مقاييسها المركزية، على عكس المنحنى الرابع، وهو منحنى مفرطح، حيث تكون القيم متباعدة عن بعضها البعض، وغير متمركزة حول وسطها الحسابي ويكون المنحنى منبسط القمة، أما المنحنى الثاني فهو منحنى الحالة العادية(الطبيعية)، ويسمى بمنحنى التوزيع الطبيعي و يشبه الجرس، وفيه تتوزع تكراراته كما يلي:

68.27 % من التكرارات محصورة بين : $\bar{x}+\sigma$ و $\bar{x}-\sigma$

95.45 % من التكرارات محصورة بين: $\bar{x}+2\sigma$ و $\bar{x}-2\sigma$

99.73 % من التكرارات محصورة بين: $\bar{x}+3\sigma$ و $\bar{x}-3\sigma$

حيث σ : الإنحراف المعياري.

و يقاس تفرطح المنحنيات التكرارية عن طريق عدة مقاييس منها :

1- معامل فيشر: الذي يعطى بالمعادلة التالية :

$$CF = \frac{m_4}{\sigma^4} \qquad 10-6$$



حيث: m_4 العزم من الدرجة الرابعة، $\sigma 4$ الانحراف المعياري مرفوع الى القوة4.

إذا كان معامل فيشر موجبا دل ذلك على أن التوزيع أقل تفرطحا من التوزيع الطبيعي، وإذا كان سالبا دل ذلك على أن التوزيع أكثر تفرطحا، أي مدببا أكثر من التوزيع الطبيعي.

2- معامل كيللي: يمكن حساب معامل التفرطح بطريقة كيللي كما يلي :

$$CK = \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} \qquad 11-6$$

مثال 6-3: أوجد معامل الإلتواء العزمي ومعامل التفرطح لفيشر، للبيانات التالية:

i	x_i	f_i
1	7	10
2	10	12
3	13	14
4	16	8
5	19	6
6	22	4

جدول6-4

الاجابة : معامل الإلتواء العزمي يعطى بالمعادلة 6-8 بينما معامل التفرطح يعطى بالمعادلة 6-10، ويتم ايجادهما بمساعدة الجدول التالي :

i	x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$	$(x_i - \bar{x})^3 f_i$	$(x_i - \bar{x})^4 f_i$
1	7	10	70	360	-2160	12960
2	10	12	120	108	-324	972
3	13	14	182	00	00	00
4	16	8	128	72	216	648
5	19	6	114	216	1296	7776
6	22	4	88	324	2916	26244
مج		**54**	**702**	**1080**	**1944**	**48600**

جدول6-5



الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{702}{54} = 13$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{1080}{54}} = 4.47$

العزم من الدرجة الثالثة: $m_3 = \frac{1944}{54} = 36$

العزم من الدرجة الرابعة: $m_4 = \frac{48600}{54} = 900$

و منه نجـــد :

1- معامل الإلتـــواء العزمـي :(بتطبيـــق المعادلـــة رقـــم 6-9) :

$$CAm = \frac{36}{(4.47)^3} = 0.4$$

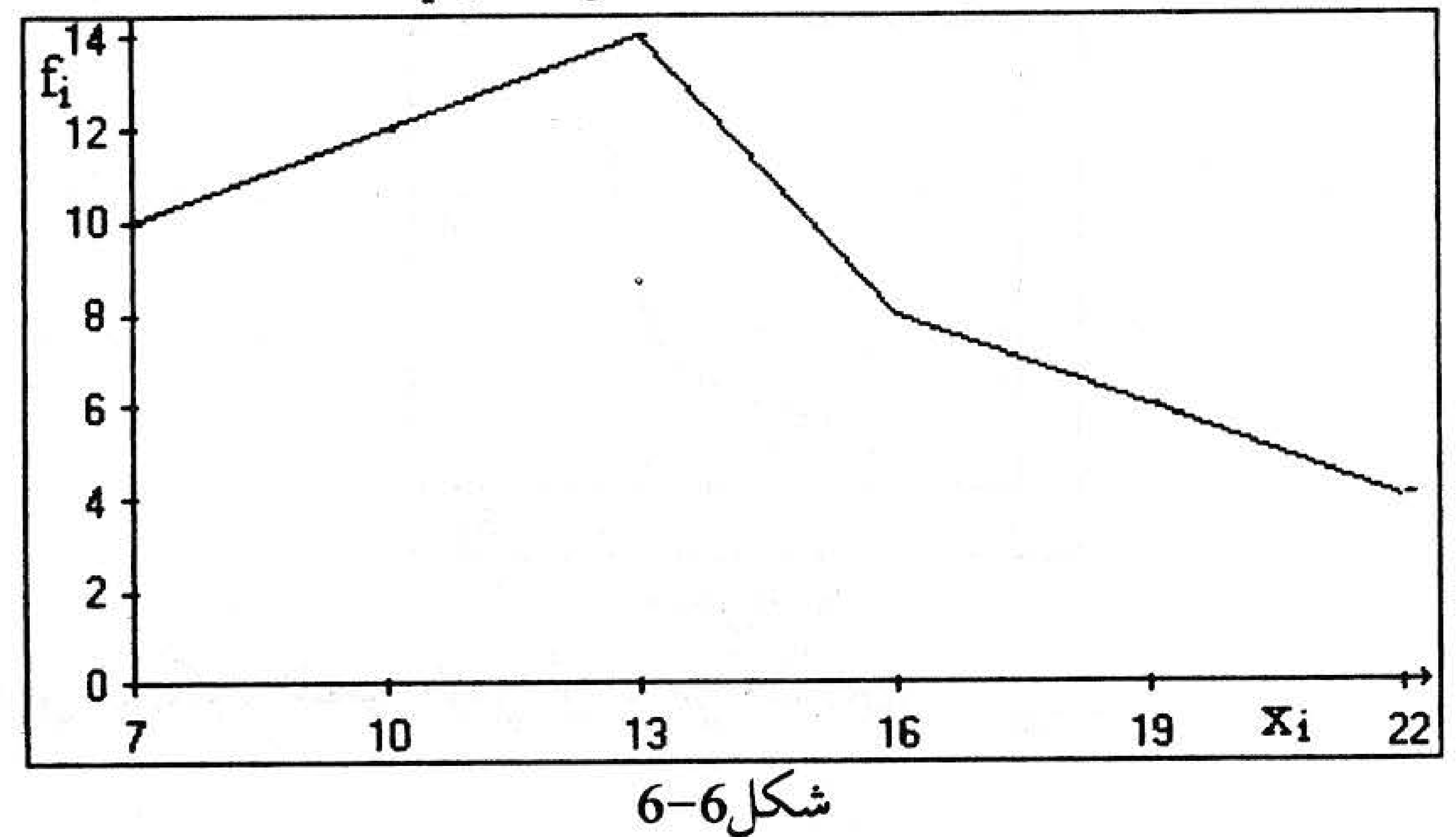
تدل النتيجة على أن التوزيـــع ملتـــو قليـــلا الى اليمـــين.

2- معامل التفرطح:

$$CF = \frac{900}{(4.47)^4} = 2.25$$

و بالتالي يكون التوزيـــع غـــير مفرطـــح.

و يمكن ملاحظة ذلك مـــن خـــلال الشـــكل المـــوالي.

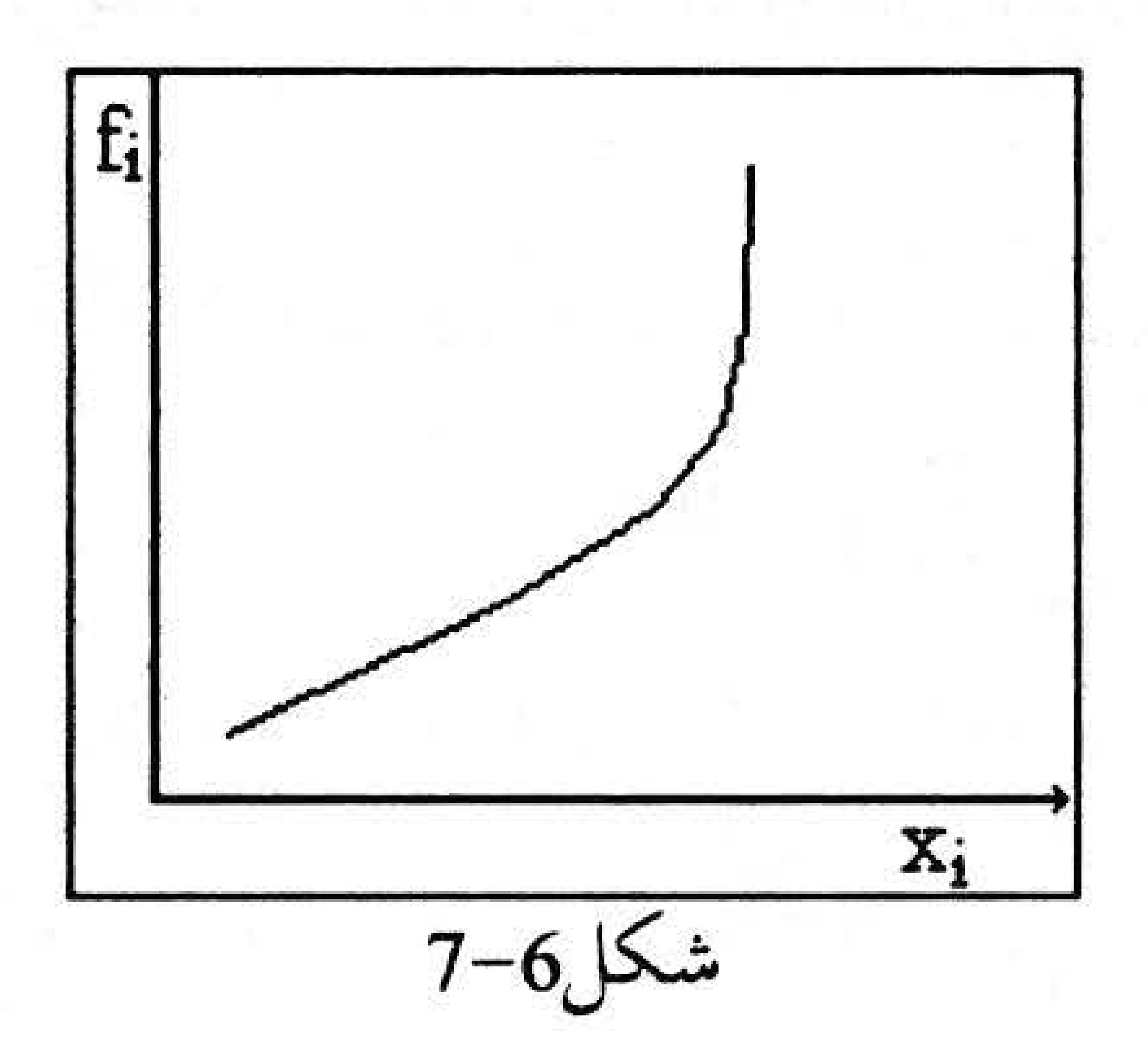


شكل6-6



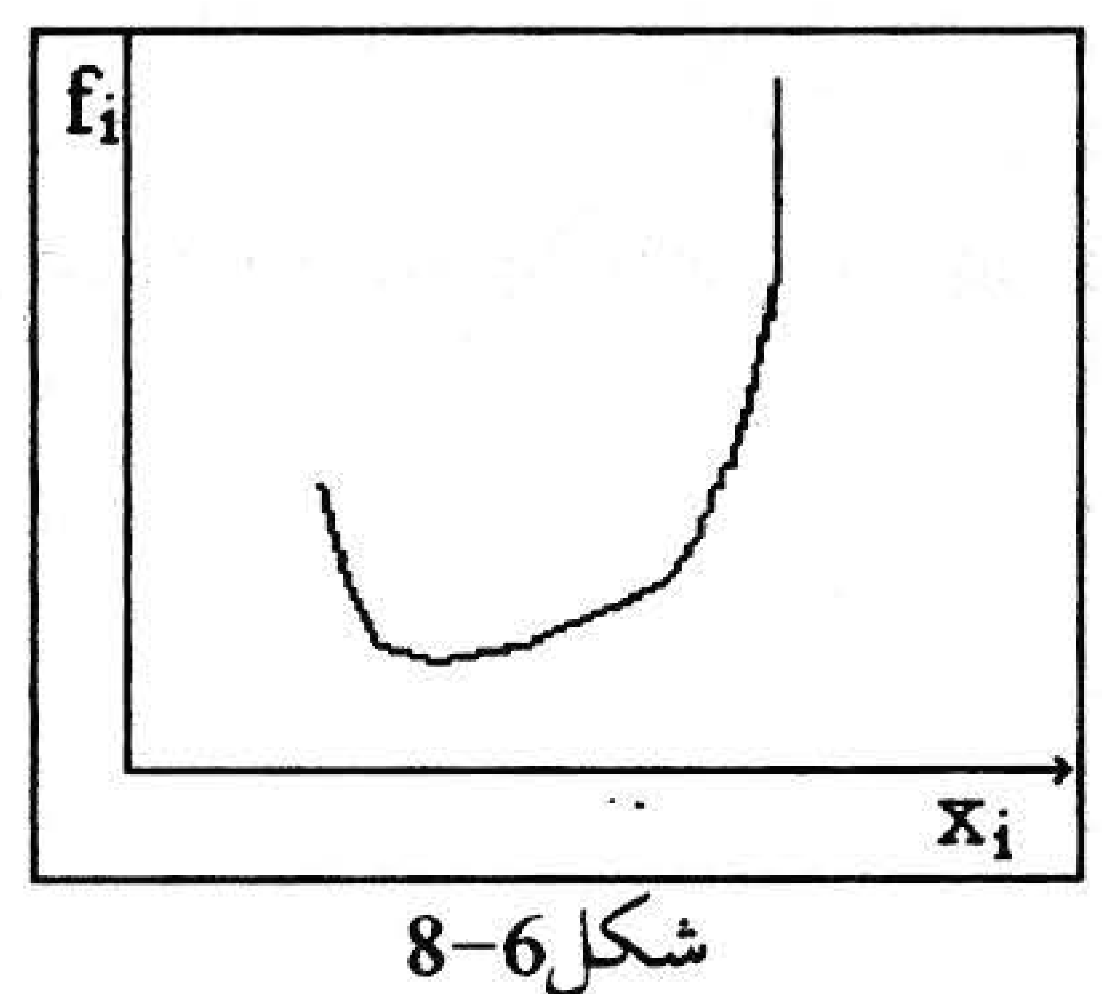
رابعا : أشكال أخرى : إضافة الى أشكال المنحنيات التي تطرقنا لها لحد الآن هناك أشكال أخرى للتوزيعات التكرارية، غير أنها قليلة المصادفة في الحياة العملية، منها ما يلي :

1- المنحنى الرائي : يشبه شكله حرف ر، لذلك سمي بهذا الإسم، وهو كما في الشكل التالي :



شكل6-7

2- المنحنى اللامي : يشبه حرف اللام، و يوضحه الشكل التالي :

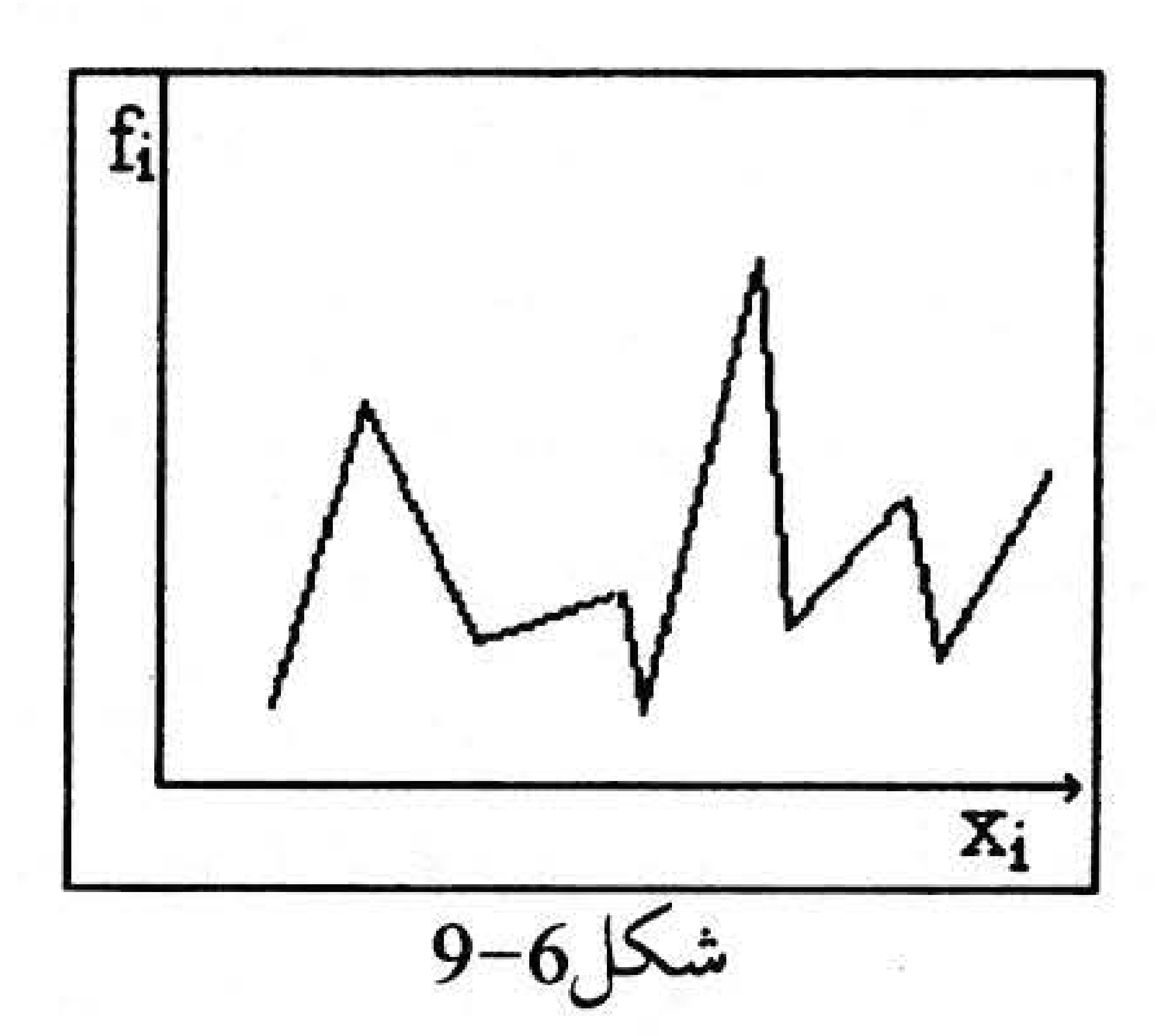


شكل6-8

يمكن أن يكون المنحنى الرائي أو اللامي مقلوبين.

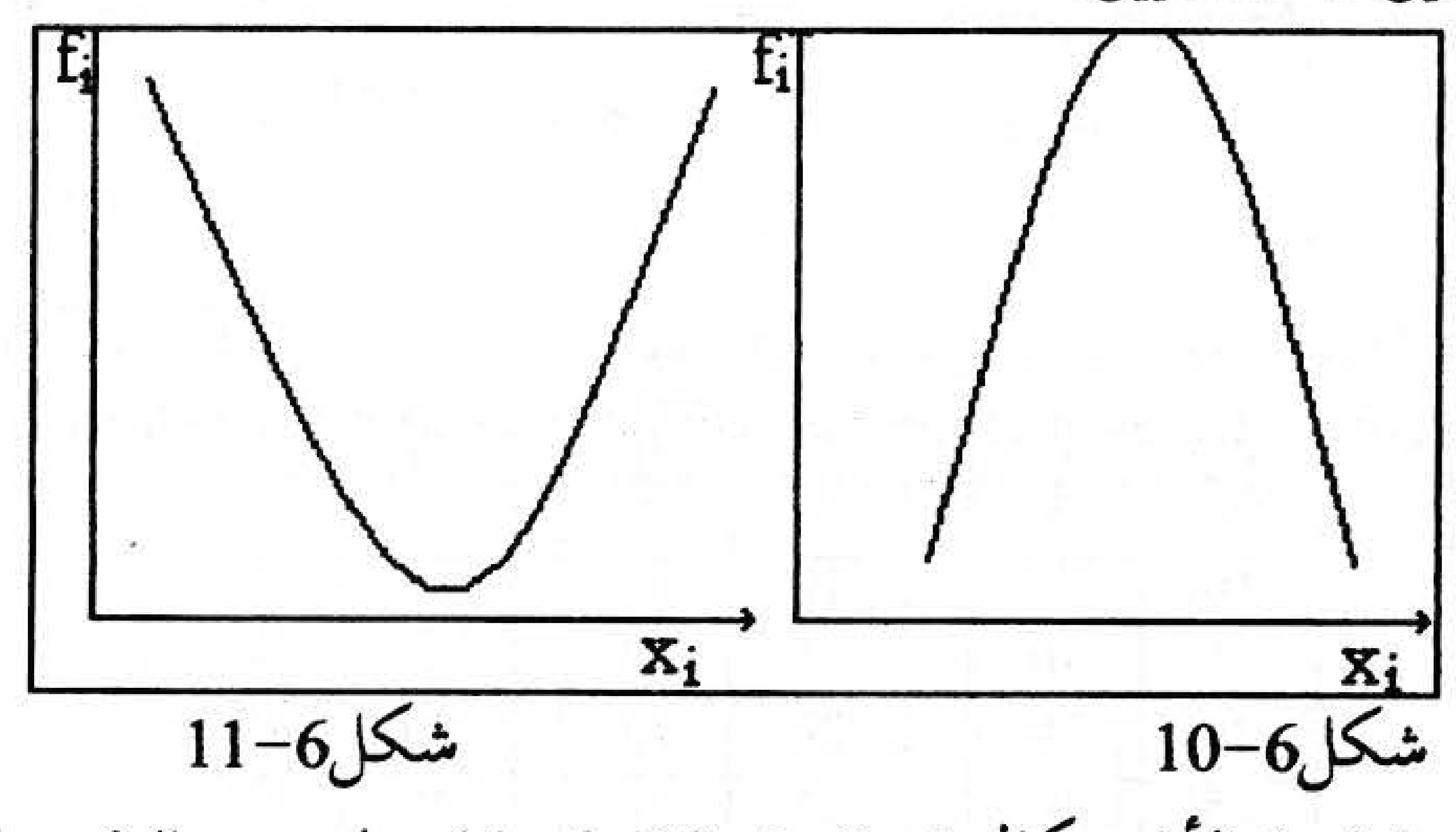


3- **منحنى متعدد القمم** : وهو المنحنى الذي تكون فيه بعض التكرارات بارزة، أو الذي يكون توزيعه متعدد المنوالات، ويكون شكله كما يلي :



شكل6-9

4- **منحنيات القطع المكافيء** : و هي التي يأخذ منحناها أحد الشكلين التاليين:



شكل6-11 شكل6-10

يمكن مصادفة الأشكال 6-9، 6-10، 6-11 خاصة في دراسة السلاسل الزمنية.



أسئلة وتمارين

تمرين1: حدد مفهومي التماثل التام والإلتواء.

تمرين2: ماهي الشروط التي يجب توافرها ليكون أي توزيع خاضع للتوزيع الطبيعي.

تمرين3: أوجد معامل إلتواء بيرسون لبيانات التمرين 6 من سلسلة تمارين الفصل الخامس. هل هذا التوزيع ملتو ؟ إشرح. قدم البيانات من خلال منحنى تكراري . هل النتائج متطابقة ؟.
أوجد معامل الإلتواء الربيعي ومعامل الإلتواء العزمي لنفس البيانات. ماذا تستنتج؟

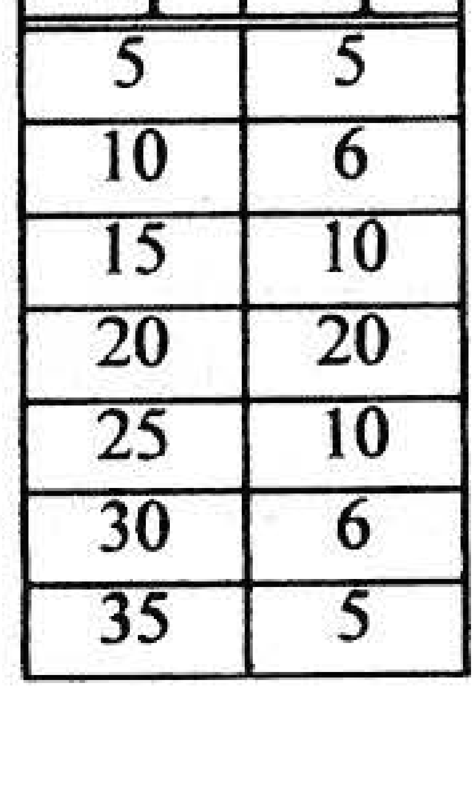
تمرين4: أوجد معامل التفرطح لبيانات التمرين 6 من سلسلة تمارين الفصل الخامس . ماذا تستنتج؟

تمرين5: من بيانات التمرين 6 من سلسلة تمارين الفصل الخامس أوجد معامل الإلتواء العزمي لكل توزيع . قارن بين التوزيعين من خلال النتائج. إرسم منحنيهما التكراريين . هل النتائج متطابقة.

تمرين6: أجب على نفس أسئلة التمرين5 ، للتوزيعات التالية.

x_i	f_i
5	1
10	5
15	9
20	15
25	14
30	12
35	8

x_i	f_i
5	5
10	6
15	10
20	15
25	6
30	2
35	2



x_i	f_i
5	5
10	6
15	10
20	20
25	10
30	6
35	5



الفصل السابع
الإنحدار والإرتباط.

خلال الفصول السابقة، تعرضنا للظواهر ذات المتغير الواحد وأدوات تحليلها الأساسية، غير أنه كثيرا ما تصادفنا ظواهر ذات متغيرين أو أكثر، أو تتطلب دراستها وجود عدة متغيرات تتماشى معا، تربطها علاقة واضحة، بحيث زيادة أحدها أونقصانه تؤثر في الآخر بالزيادة أو النقصان، وبمعنى آخر تغير أحدها يؤدي الى تغير الآخر إما إيجابيا أو سلبيا، وتوجد الكثيرمن الظواهر من هذا النوع، فعلى سبيل المثال زيادة الدخل المتاح للفرد، لابد أن تقابلها زيادة في مصاريفه الاستهلاكية، وانخفاض دخله لابد أن يؤثر سلبا أيضا على مصاريفه الاستهلاكية، وزيادة كميات التساقط في موسم فلاحي ما، لابد أن يقابلها إنتاج وفير من الحبوب مالم يتدخل عامل آخر، والعكس صحيح، في مثل هذه الظواهر توجد علاقة طردية بين متغيراتها، وهو ما يعبر عنه بالارتباط الطردي، كما يمكن أن تكون علاقة عكسية بين المتغيرات بحيث زيادة أحدها تؤدي الى نقصان الآخر، فزيادة سعر مادة غذائية ما مثلا، تؤدي الى نقصان الكميات المستهلكة منها ما لم تكن ضرورية، وهذا ما يعبر عنه بالإرتباط العكسي.

إن الهدف من هذا الفصل هو ترجمة العلاقة التي يمكن أن توجد بين متغيرين إقتصاديين أو أكثر، من خلال المعطيات الرقمية لهذه المتغيرات، الى علاقة رياضية تحدد بنوع من الدقة طبيعة تلك العلاقة، هل هي علاقة طردية أوعكسية ؟، وما هي درجة إرتباطها، قوية أم ضعيفة ؟ و قبل ذلك ماهي العلاقة الدالية بينها، هل هي خطية أو ما يصطلح عليه بعلاقة الإنحدار الخطي والتي هي موضوع هذا الفصل ؟ أو هي علاقة غير خطية ؟

وذلك كله لأجل الاستفادة في معرفة درجة إستجابة أحد المتغيرات عند تغير الآخرى بقيم ما، وبمعنى آخر إستخدام العلاقة المستنتجة في التخمين المستقبلي للظواهر.

في علاقات الظواهر الفيزيائية، يمكن أن نصادف مثل هذه العلاقات، بحيث تكون في شكل خطي تام، كعلاقة المسافة المقطوعة بالنسبة للزمن، عند ثبات السرعة مثلا، بحيث عند رسم هذه العلاقة على معلم متعامد تظهر نقاط الأزواج المرتبة على إستقامة تامة، وتكون دالة المسافة بالنسبة للزمن دالة خطية تامة، وهذا ما سنصطلح على تسميته بالإنحدار الخطي التام، غير أن مثل ذلك نادر المصادفة في علاقات المتغيرات الإقتصادية والاجتماعية عامة، إذ العلاقة بين المتغيرات في مثل هذه الظواهر يمكن أن تأخذ اتجاها خطيا لكن ليس بالتام، ويتم ايجاد دالة الإنحدار التقريبية فقط.

ولمعرفة ما إذا كان الإنحدار الخطي تاما أو غير تام، فانه يتم أولا تحديد طبيعة المتغيرات، أي ماهو المتغير الذي يؤثر في الآخر، وبمعنى آخر ما **هو المتغير التابع** و **ماهو المتغير أو المتغيرات المستقلة** أي المتغير أو المتغيرات التي تؤثر في التابع، ثم يتم على معلم متعامد تحديد نقاط العلاقة بين المتغيرات وهو ما نصطلح عليه **بشكل الانتشار**، ومنه يمكن معرفة طبيعة الإنحدار، هل هو إنحدار خطي أو غير خطي، وهل هو إنحدار تام أو إنحدار غير تام.

نستشف من هذا التقديم أن هناك نوعين أساسيين من الإنحدار، الأول نصطلح عليه بالإنحدار الخطي البسيط والذي يعتمد على متغيرين فقط أحدهما تابع و الآخر مستقل، و الثاني هو ما سنصطلح عليه بالإنحدار المتعدد و الذي يعتمد على متغير تابع لمجموعة من المتغيرات المستقلة الأخرى، قد يكون عددها

إثنان أو ثلاثة أو أكثر من ذلك، ونظرا لأن دراسته تتطلب الإعتماد على جبر المصفوفات، فإننا نتطرق في هذا الفصل فقط الى ما نسميه بالإنحدار الثلاثي و هو الذي يعتمد على متغير تابع ومتغيرين مستقلين إضافة الى الإنحدار الخطي البسيط، و ذلك في البند الأول، أما في البند الثاني فسوف نتطرق الى معرفة كيفية إكتشاف درجة قوة العلاقة بين المتغيرات و هو ما نسميه بالإرتباط .

أولا : الإنحدار: سوف نتطرق في هذا البند الى الإنحدار الخطي البسيط والإنحدار الخطي الثلاثي، متجنبين بذلك الإنحدار المتعدد لكونه يعتمد على جبر المصفوفات، وهو ما لم نمهد له .

نشير الى أن دراسة الإنحدار بصفة عامة تعتمد على فرضيات أساسية، تخص حد الخطأ أو البواقي، غير أننا سوف لن نتطرق لها في هذا المقام لكونها تحتاج الى تسبيقات نظرية أساسها الإحصاء الرياضي.

1- الإنحدار الخطي البسيط

أ-المتغيرات: يعرف في الإنحدار الخطي البسيط متغيرين أساسيين، إذا كانت لدينا القيم : $y_1 , y_2 , y_3 , . . . y_n$ ، تنجم عن القيم: $x_1 , x_2 , x_3 , . . . x_n$ ، على التوالي، فإنه يمكن إعطاء التعريف التالي :

تعريف 7-1: يسمى المتغير **بالمتغير التابع**، ونرمز له بـ: y_i، إذا كانت كل قيمة له تتأثر تبعا لتغير قيمة متغيرآخر x_i يسمى **بالمتغير المستقل**.

ب: شكل الإنتشار: بعد تحديد المتغير المستقل والمتغير التابع، يتم رسم معلم متعامد، بحيث يوضع على المحور العمودي المتغير التابع، وعلى المحور الأفقي المتغير المستقل، ويتم بعد ذلك تحديد نقاط الأزواج المرتبة

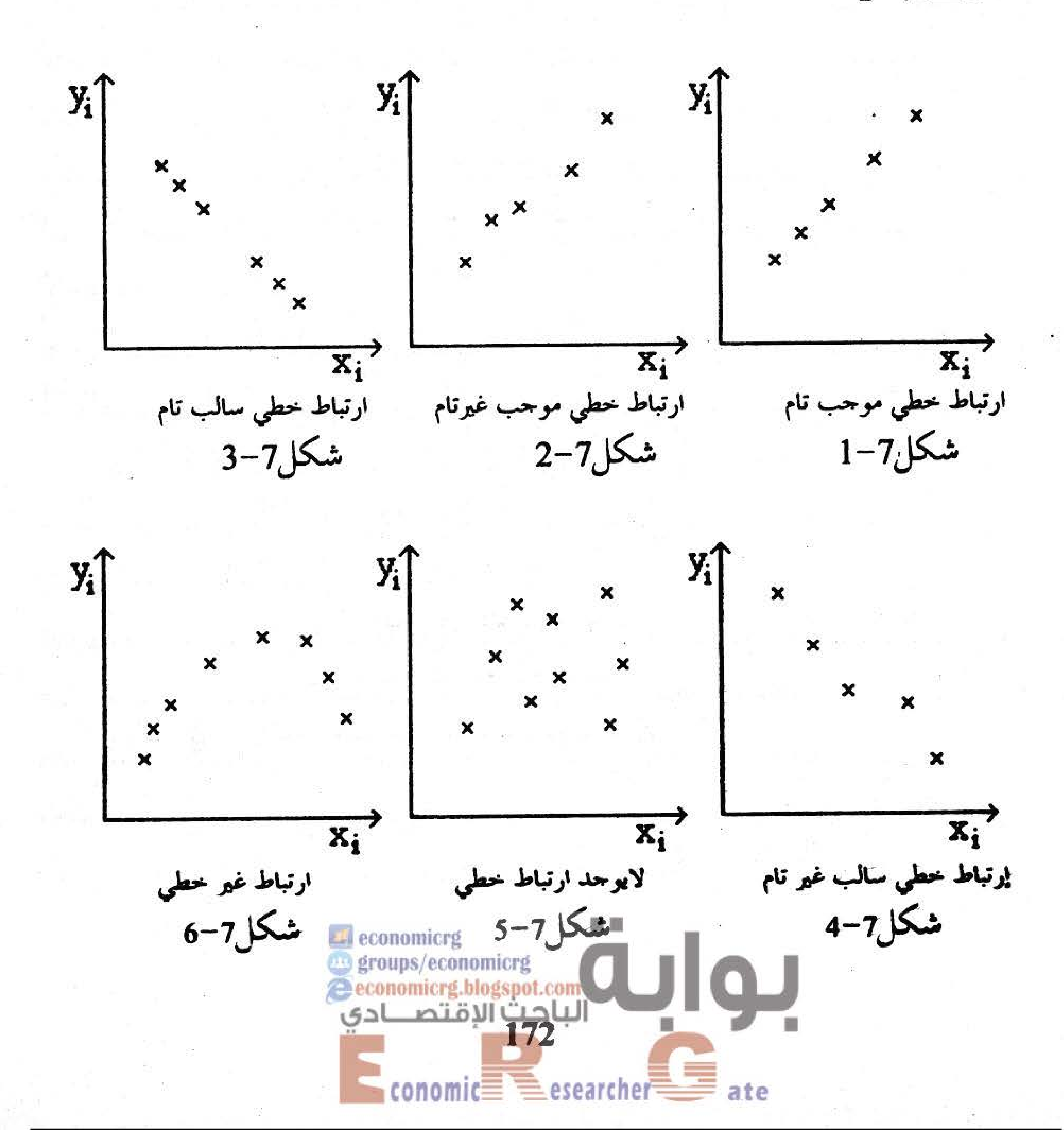


(x_i ، y_i)، لكل قيم الظاهرة . تسمى النقاط المحصل عليها، **بشكل الانتشار .**

تعريف 7-2: شكل الانتشار لظاهرة ما ذات متغيرين أحدهما تابع و الآخر مستقل، هو مجموعة نقاط الأزواج المرتبة (x_i ، y_i) ، لتلك الظاهرة المجسدة على معلم متعامد.

و يمكن أن نصادف عمليا في الظواهر ذات المتغيرين، عدة أنواع من أشكال الانتشار، كل نوع يحدد طبيعة الارتباط بينهما، وبالتالي يحدد طبيعة الإنحدار بينهما، ومن تلك الأشكال ما يلي:

أمثلة 7-1



ارتباط خطي موجب تام — شكل 7-1
ارتباط خطي موجب غير تام — شكل 7-2
ارتباط خطي سالب تام — شكل 7-3
إرتباط خطي سالب غير تام — شكل 7-4
لايوجد ارتباط خطي — شكل 7-5
ارتباط غير خطي — شكل 7-6

الشكلين7-1 و 7-3، يوحيان بوجود إرتباط خطي تام بين المتغيرين، وبالتالي فإنه توجد علاقة بينهما تسمى علاقة **إنحدار خطي تام** ، موجب (طردي) كما في الشكل الأول، وسالب(عكسي) كما في الشكل الثاني، وهذا النوع من الإنحدار قليل المصادفة في الظواهر الإقتصادية والاجتماعية، أما الشكلين 7-2 و 7-4 فيوحيان بوجود إرتباط غير تام بين المتغيرين، وبالتالي وجود علاقة إنحدار خطي غير تامة بينهما، طردية كما في الأول وعكسية كما في الثاني، وهذا النوع من العلاقات كثير المصافة في الظواهر الإقتصادية والإجتماعية .

وفي أحيان أخرى عند رسم شكل الانتشار نصادف شكل يشبه الشكل رقم 7-6 وفي هذه الحالة نقول أنه يوجد ارتباط بين المتغيرين غير أن هذا الارتباط يوحي بوجود علاقة إنحدار غير خطية بينهما بل وجود علاقة أسية، أما إذا كان شكل الانتشار مبعثرا كما في الشكل 7-5، فيدل ذلك على أنه لاتوجد أية علاقة بين المتغيرتين . وتقاس شدة العلاقة بين المتغيرات المشار اليها بما يسمى **بمعامل الارتباط**، وهو رقم نسبي يوحي بطبيعة وشدة (درجة) العلاقة بينها (انظر البند الثاني).

ج- الإنحدار الخطي البسيط التام.

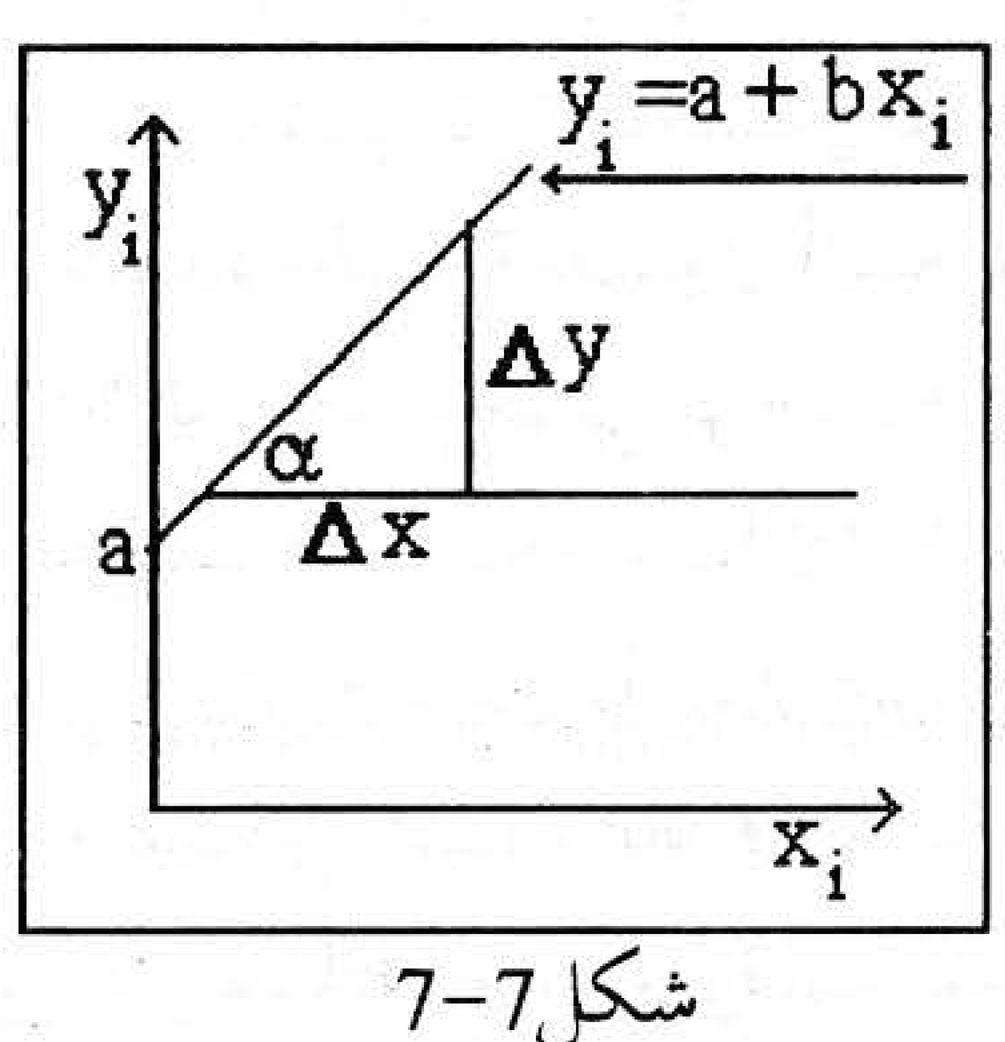
تعريف7-3: الإنحدار الخطي البسيط التام، هو الذي تكون كل نقاط شكل إنتشاره المحصل عليها من تجسيم متغيرتيه على معلم متعامد، على إستقامة تامة، سواء كانت في الاتجاه الموجب أو في الاتجاه السالب، وتكون معادلة الإنحدار على النحو التالي:

$$y_i = a + bx_i \qquad 1-7$$



حيث: b: ميل دالة الإنحدار و a : ثابت الدالة، وتدل على قيمة الدالة عندما ينعدم x_i .

وهي دالة خط مستقيم يمكن إيجاد معالمها : b و a بسهولة، وذلك باستخدام الطرق الهندسية، إذ يتم الايصال بين نقاط شكل الانتشار لنحصل على خط مستقيم ثم نوجد ميله، الذي يساوي الى ظل الزاوية المحصورة بين المنحنى والمستقيم الأفقي الموازي لمحور السينات، ونوجد بعد ذلك ثابت الدالة a، وهو عبارة عن نقطة تقاطع المنحنى مع المحور العمودي كما يوضحه الشكل الموالي.



شكل7-7

بما أن b هو ميل الدالة، فهو اذن عبارة عن ظل الزاوية α المحصورة بين المنحنى و المستقيم الموازي للمحور الأفقي، أي :

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad 2-7$$

حيث أن القيم تكون موجودة على المعلم، لذلك يتم ايجاد b هندسيا بكل سهولة ، بينما a هي عبارة عن نقطة تقاطع خط الإنحدار مع المحور العمودي، و يمكن إيجادها هندسيا من الرسم أيضا، ونحصل بذلك على معلمتي الدالة .



مثال7-2: البيانات التالية تظهر تطور الدخل والاستهلاك لدولة ما بملايير الدينارات:

رقم السنة	الدخل	الإستهلاك
1	0	50
2	60	90
3	120	130
4	150	150
5	180	170
6	240	210
7	300	250

جدول7-1

المطلوب:

ا- حدد المتغير التابع والمتغير المستقل.

ب- ارسم شكل الانتشار. ماذا تلاحظ ؟.

ج- أوجد معادلة إنحدار الاستهلاك على الدخل.

الاجابة:

أ- **تحديد المتغير التابع و المتغير المستقل:** بما أن الاستهلاك يتأثر بالدخل نظريا، إذ كلما إزداد الدخل إزداد الاستهلاك تبعا لذلك، والعكس صحيح و هو ما نلاحظه من خلال البيانات الإحصائية الواردة في الجدول، لذلك فإن:

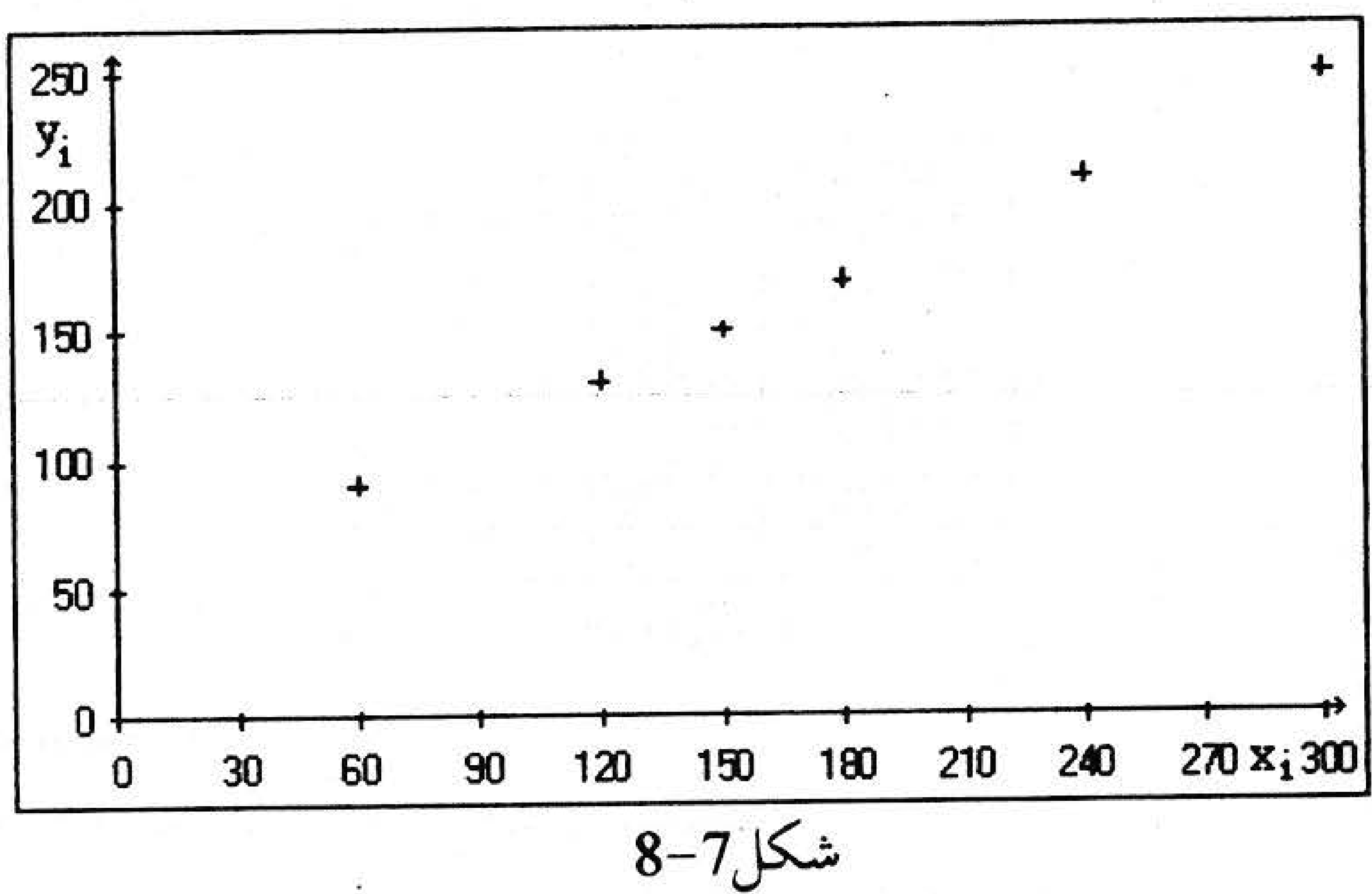
الإستهلاك : هو المتغير التابع ، ونرمز له بـ: y_i

الدخل : هو المتغير المستقل ، و نرمز له بـ: x_i

و يعني ذلك أن الإستهلاك هو دالة في الدخل أي: $y_i=f(x_i)$ لا يمكننا أن نعرف طبيعتها إلا بعد أن نرسم شكل إنتشارها.



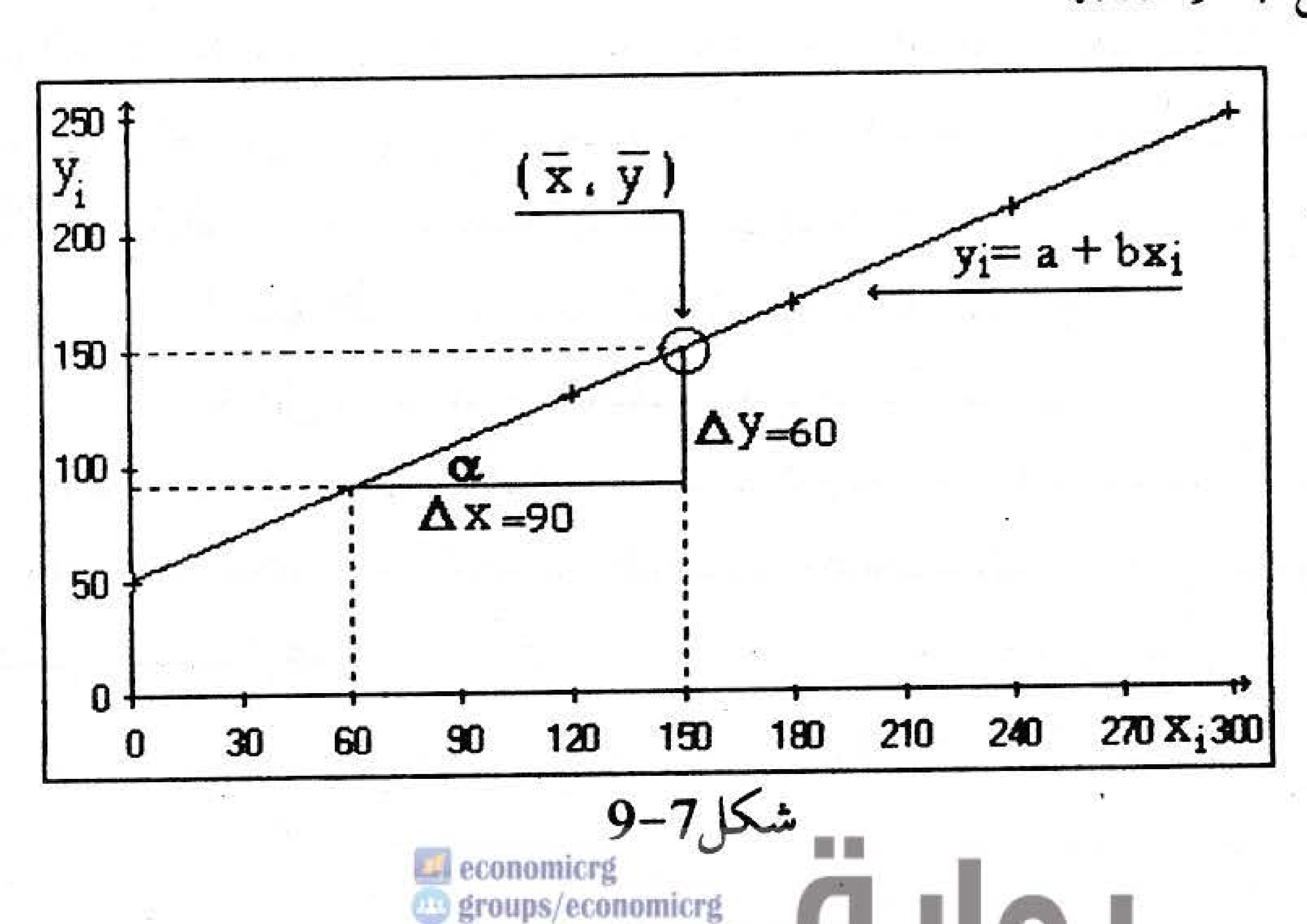
ب- شكل الإنتشار:



شكل7-8

نلاحظ أن نقاط شكل الإنتشار كلها على إستقامة تامة ، وبالتالي فإن معادلة الانحدار تكون على شكل المعادلة 7-1، أي: $y_i= a + bx_i$

ج- ايجاد معادلة انحدار الاستهلاك على الدخل : بما أن نقاط شكل الانتشار على إستقامة تامة ، لذلك يتم ايجاد معلمتي الدالة بالطرق الهندسية وبمساعدة الشكل 7-9 أدناه.



شكل7-9

حيث:

b هوميل الدالة و ظل الزاوية α أي:

$$b = Tg\alpha = \frac{60}{90} = 0.67$$

a : هي نقطة تقاطع لمنحنى مع محور العينات و منه نجد: a=50

و بالتالي فإن معادلة إنحدار الإستهلاك على الدخل هي:

$y_i = 50 + 0.67x_i$ مليار دينار 7-3

و يمكن التأكد من صحة المعادلة بإعطاء قيم لـ: x_i من الجدول رقم 7-1، فسوف نجد بالضرورة نفس القيمة المقابلة لها.

و يمكن إستخدام هذه المعادلة في إيجاد أية **قيمة مستقبلية** للإستهلاك إذا عرف الدخل و ذلك بالتعويض في المعادلة، فإذا فرضنا أن الدخل سوف يصبح في السنة التاسعة 400 مليار دينار، فإن الإستهلاك المتوقع لهذه السنة هو:

$y_9 = 50+0.67(400)=318$ مليار دينار

يعني هذا أن الإستهلاك خلال السنة التاسعة سيكون 318 مليار دينار.

هذه هي الحالة الأولى من الانحدار الخطي ، و هي الحالة التي تكون فيها نقاط شكل الانتشار على إستقامة تامة ، حيث نجد معادلة الانحدار بدقة تامة ،غير أن هذه الحالة نادرة المصادفة ، في الظواهر الاقتصادية والاجتماعية ، كما سبقت الاشارة الى ذلك ، إذ في الغالب تكون نقاط شكل الانتشار ليست على إستقامة تامة ، لكنها تأخذ إتجاها عاما يقترب من الخط المستقيم ، وهو ماسنتعرض له في البند الموالي .

د-الانحدار الخطي البسيط غير التام : في هذه الحالة يشبه شكل الانتشار الشكل رقم 7-2 أو 7-4، إذ أن نقاط



شكل الانتشار لاتكون على إستقامة تامة، لكنها تأخذ إتجاها يمكن تقريبه من معادلة خط مستقيم، حيث أنه يستحيل إيجاد المعادلة الحقيقية، التي نفترضها كما يلي:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \qquad 4-7$$

حيث أن الشق الأول من المعادلة وهو : $a + bx_i$، هو معادلة خط مستقيم، وقد أضيف لها المقدار ε_i الذي هو قيمة البعد بين النقاط الحقيقية ومعادلة الخط المستقيم، وحيث أنه يستحيل ايجاد هذه المعادلة لذلك يتم تقريبها تقديريا الى المعادلة الخطية التالية :

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i \qquad 5-7$$

حيث:

$\hat{y}$ قيمة تقدرية لـ yi و $\hat{a}$ قيمة تقديرية لـ a و $\hat{b}$ قيمة تقديرة لـ b

يمر مستقيم هذه الدالة من النقطة : $\bar{x}$ و $\bar{y}$ (الوسطين الحسابيين للمتغيرين).

يفترض أن تعطي هذه المعادلة خطا مستقيما أقرب ما يمكن الى جميع **نقاط شكل الإنتشار الحقيقية**، و يتم إيجاد معلمتيها (الثوابت)، بما يسمى **بطريقة المربعات الصغرى**، التي تعطي المعادلتين التقديريتين لهما كما يلي:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad 6-7$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad 7-7$$

حيث: $\bar{y}$: الوسط الحسابي لقيم العينات، أي : $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N}$



$\bar{x}$: الوسط الحسابي لقيم السينات، أي : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$

و ستتم البرهنة واشتقاق المعادلتين بطريقة المربعات الصغرى في البند الموالي.

مثال7-3: البيانات التالية تظهر تطور كل من الدخل الداخلي والواردات السلعية بملايير الدينارات، خلال الفترة 2004/1997

السنة	واردات	د.داخلي
1997	10	10
1998	12	15
1999	15	20
2000	16	25
2001	16	30
2002	20	35
2003	26	40
2004	30	45

جدول7-2

المطلوب:

1- حدد المتغير التابع والمتغير المستقل.

2- على معلم متعامد إرسم شكل الانتشار . ماذا تستنتج ؟

3- أوجد معادلة انحدار الواردات على الدخل الداخلي.

الإجابة :

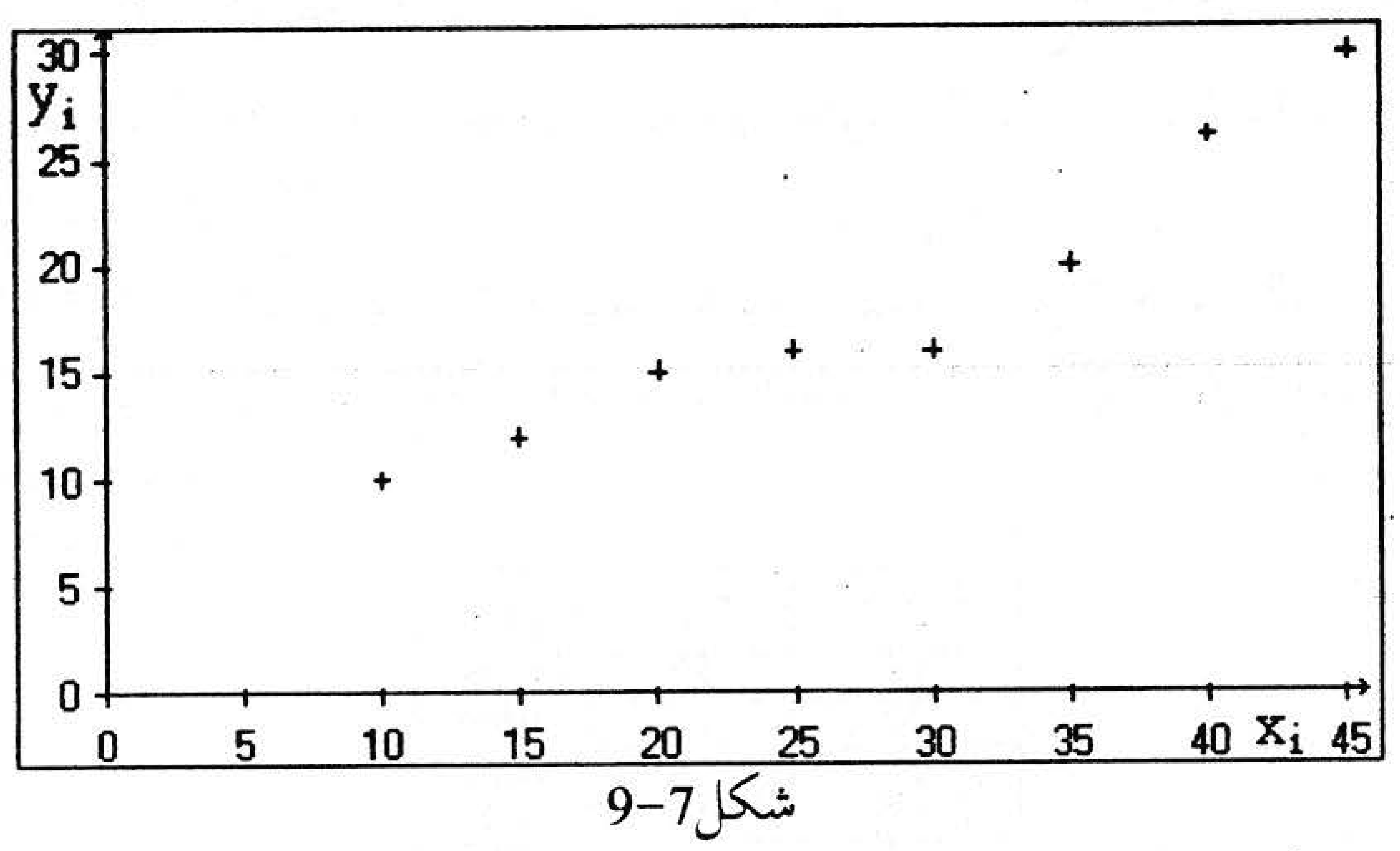
*- الدخل الداخلي يعكس قدرة الدولة على تلبية الحاجيات، فكلما إزداد الدخل الداخلي تزداد قدرة الدولة على الإستيراد، و كلما إنخفض الدخل الدخلي إنخفضت قدرة الدولة على الإستيراد، و عليه فإن الواردات تزداد كلما ازداد الدخل الداخلي، وتنخفض كلما انخفض نظريا، لذلك فإن :

_ الواردات : هي المتغير التابع، ونرمز له بـ: y_i

- الدخل الداخلي : هو المتغير المستقل، ونرمز له بالرمز: x_i.



*- شكل الانتشـــــار:



شكل7-9

نلاحظ أن نقاط شـــكل الانتشـــار ليســـت علـــى اســـتقامة تامـــة، غـــير أنه يمكن تقريبها الى معادلة خـــــط مســـتقيم مـــن شـــكل المعادلـــة رقـــم 7-5، وســـيتم تقديـــر معالمـــها عـــن طريـــق المعـــــادلتين : 7-6 و 7-7 المشار اليهما أعلاه، وبمســـــاعدة الجـــدول التـــالي:

i	y_i	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	10	10	306.25	142.28
2	12	15	156.25	76.63
3	15	20	56.25	23.48
4	16	25	6.25	5.33
5	16	30	6.25	-5.33
6	20	35	56.25	12.53
7	26	40	156.25	98.38
8	30	45	306.25	207.73
مج	**145**	**220**	**1050.00**	**561.60**

جدول7-3

نجد : **الوسطين الحسابيين** للمتغيرين المستقل و التابع هما:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{220}{8} = 27.5 \quad و \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \frac{145}{8} = 18.13$$

ميل دالة الانحدار المقدرة (المعلمة : $\hat{b}$) نجده بتطبيق المعادلة 7-6 أعلاه ومن نتائج الجدول 7-3 نجد :

$$\hat{b} = \frac{561.69}{1050} = 0.53$$

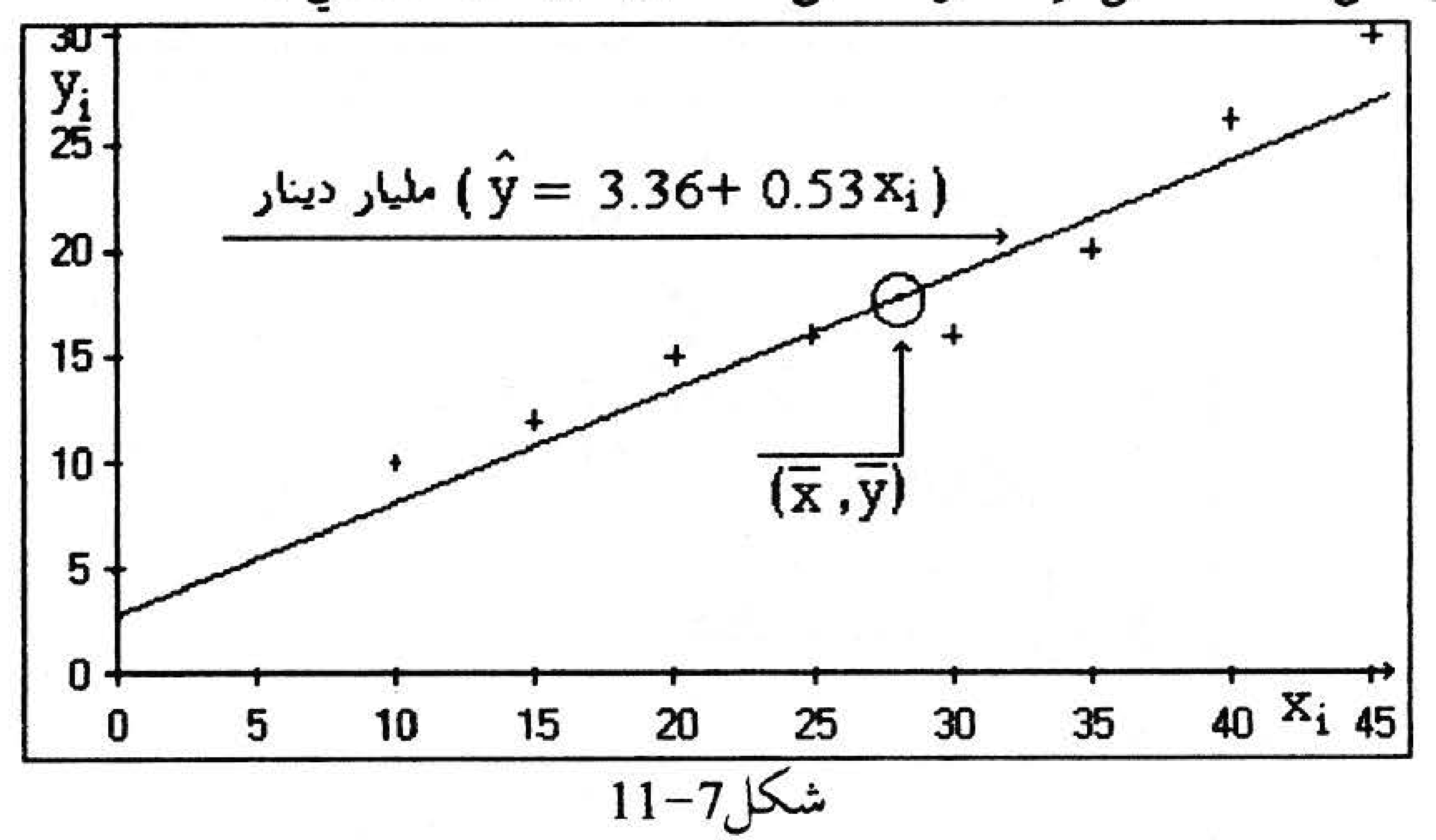
القيمة الثابتة لدالة الانحدار المقدرة (المعلمة : $\hat{a}$) هي :

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 18.13 - 0.53(27.5) = 3.36$$

ومنه تكون معادلة الانحدار المقدرة كما يلي:

$$(\hat{y}_i = 3.53 + 0.53x_i) \quad \text{مليار دينار}$$

يمكن ملاحظة أن مستقيم هذه المعادلة هو أقرب خط مستقيم الى كل نقاط شكل الإنتشار من خلال البيان التالي :



شكل7-11

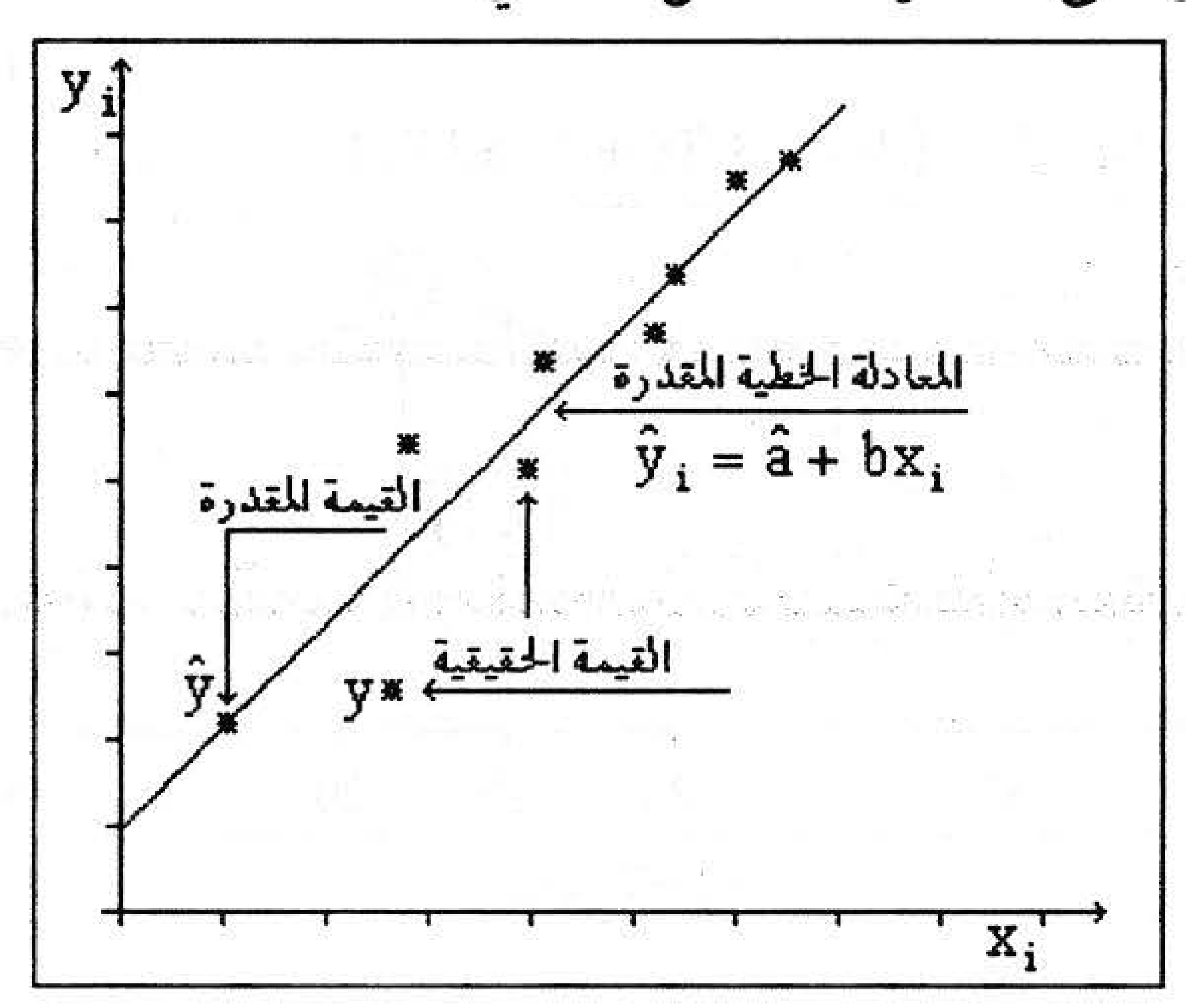
ويمكن أن يعطي قيمة تنبؤية للمتغيرy، عند اعطاء أية قيمة مستقبلية للمتغيرx، فاذا ما افترضنا على سبيل المثال أن قيمة الدخل الداخلي، ستكون 100 مليار دينار في سنة 2006، فان القيمة التنبؤية للواردات في هذه السنة ستكون:

$$\hat{y}_{2006} = 0.53(100) + 3.36 = 56.36 \quad \text{مليار دينار}$$



و هـذا مـا يسـمى بـالتنبؤ النقطـي، غـير أن واقـع الظواهـر الإقتصادية و الإجتماعيـة يجعـل مـن ذلـك نـادر المصادفـة، لذلـك ففي حالة التنبـؤ يلجـأ الى إسـتخدام مـا يسـمى بالمجـال، و فكرتـه أن نوجد مجال نتنبـأ أن تكـون قيمـة المتغـير التـابع ضمنـه، و ذلـك بإحتمال معين، و يتم ذلـك أيضـا باسـتخدام طـرق علميـة سـوف لن نتعرض لها في هـذا الكتـاب.

هـ- تقدير المعالم بطريقة المربعات الصغرى: تهـدف طريقة المربعـات الصغـرى كمـا سـبقت الإشـارة الى إيجـاد معادلـة خطية تقديريـة، يكـون خطهـا أقـرب مـا يمكـن الى جميـع نقـاط شكل الإنتشار على نحـو الشـكل التـالي:



شكل7-12

كما هو واضـح في الرسـم أعـلاه، فـان معادلـة المسـتقيم المفـترض أن يكون أقرب ما يمكن الى جميع نقـاط شـكل الانتشـار هـي:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i \qquad 9-7$$

بينما المعادلة الحقيقية و التي يستحيل إيجادها ما دامت نقاط شـكل الإنتشـار ليست على إستقامة تامة هي:



$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \qquad 10-7$$

حيث ε_i هي قيمة عشوائية تعادل قيمة الإنحرافات عن المنحنى الخطي للدالة.
بإفتراض e_i هي قيمة تقريبية للمقــدار ε_i و هي الفرق بين القيم الحقيقية y_i والقيم المقدرة : $\hat{y}_i$ أي:

$$e = (y_i - \hat{y}_i) \qquad 11-7$$

فــإن هــذا المقــدار يســمى بــالبواقي، و حتــى تكــون المعادلـــة التقديرية أقرب ما يمكــن الى جميــع نقــاط شــكل الإنتشــار، يجــب أن يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) \rightarrow 0 \qquad 12-7$$

أي مجمــوع البواقــي يــؤول الى الصفــر، وهــذا يكــافيء كذلــك مربعات البواقي تــؤول الى أدنــى قيمــة ممكنــة، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2 \rightarrow \text{أدنى قيمة} \qquad 13-7$$

بتعويض $\hat{y}_i$ المقدرة بقيمتها حسب المعادلة 7-9 نجد :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - \hat{b}x_i)^2 \rightarrow \text{أدنى قيمة} \qquad 14-7$$

وحتى تأخذ المعادلة رقم 7-14 قيمتها الدنيا، يجب أن يتحقق شرطان :

الشرط الأول (اللازم): المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمعالم، تساوي الصفر.

الشــرط الثــاني (الكــافي): المشــتقات الثانيــة بالنســبة للمعــالم، يجب أن تكون أكبر مــــن الصفـــر.

إذن لايجاد قيم المعالم المقدرة التي تجعل مربعات البواقي في أدنى قيمة لهــا، يجب أن نساوي المشتقة الأولى بالنسبة لميل الدالة الى الصفر، ثم نبحــث عــن قيمة الميل بدلالة بقية المتغيرات، ونقوم بنفس الشيء بالنسبة للمعلمة الثانية.

نضع :



$$K = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 \qquad 15-7$$

بالإشتقاق جزئيا بالنسبة لـــ : K

$$\frac{\partial K}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0 \qquad 16-7$$

ومنه يكون :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0 \qquad 17-7$$

بفك القوس نجد :7-18

$$\sum_{i=1}^{n}y_i - N\hat{a} - \hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة 7-18 على المقدارN نجد:

$$\bar{y} - \hat{a} - \hat{b}\bar{x} = 0 \qquad 19-7$$

و منه يكون :

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad 20-7$$

باشتقاق K جزئيا بالنسبة للمعلمة الثانية نجد:

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)x_i = 0 \qquad 21-7$$

أي : 7-22

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)x_i = 0$$

بفك المعادلة 7-22 نجد :

$$\sum_{i=1}^{n}y_i x_i - \hat{a}\sum_{i=1}^{n}x_i - \hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 0 \qquad 23-7$$

وهذا يكافيء :

$$\sum_{i=1}^{n}y_i x_i = \hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \hat{a}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad 24-7$$

بتعويض المعادلة 7-20 في المعادلة 7-24 نجد:



$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - \hat{b}\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 25-7$$

ومنه نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{b}\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 26-7$$

بإخراج $\hat{b}$ عامل مشترك و تحويل $\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i$ الى الطرف الأيسر نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \qquad 27-7$$

و أخيرا تكون قيمة $\hat{b}$ كما يلي :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad 28-7$$

يمكن إستخدام هذه المعادلة في تقدير ميل الدالة، غير أنه يصعب إستخدامها عندما تكون أرقام المتغيرات كبيرة، لذلك يتم إستخدام معادلة أخرى، تعتمد على الانحرافات عن الوسط الحسابي، وهي المعادلة المعطاة في البند السابق تحت رقم : 7-6 ، والتي يتم اشتقاقها باتباع المنهجية التالية:

في بسط المعادلة7-28 نطرح ونضيف المقدار : $\bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i$

في مقام المعادلة 7-28 نطرح ونضيف المقدار : $\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i$

فنحصل على العبارة التالية:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i + \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad 29-7$$

الطرف الأخير في البسط هو : $N\bar{x}\,\bar{y}$ الطرف الأخير في المقام هو : $N\bar{x}^2$

بالتعويض في 7-29، وإخراج المجموع نجد:

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-\bar{y}\,x_i-\bar{x}\,y_i+\bar{x}\,\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\bar{x}\,x_i+\bar{x}^2)} \qquad 30-7$$

ومنه يمكن كتابة البسط والمقام على النحو التالي :

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad 31-7$$

واضح أن المعادلة 7-31، سهلة الاستخدام، كما أنها تختصر الأرقام، لكونها تعتمد على الانحرافات عن الوسط الحسابي .
تسمى طريقة ايجاد المعالم المقدرة لدالة الانحدار بهذه الطريقة، **بطريقة المربعات الصغرى.**
يمكن التأكد بأن القيمتين : $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ، المقدرتين بهذه الطريقة تؤديان الى نهاية صغرى لمربعات البواقي، بمراجعة المشتقات الجزئية الثانية للمعادلة 7-15، وذلك بالنسبة للمعلمتين، اذ نجد هذه المشتقات موجبة.
كما هو ملاحظ فان الإنحدار الخطي البسيط كما تم تناوله لحد الآن يعتمد على متغيرين أساسين هما المتغير التابع و المتغير المستقل، غير أن هناك بعض المتغيرات الإقتصادية تعتمد على عدد أكثر من المتغيرات المستقلة، قد يكون عددها إثنان أو أكثر، ويتم تناول ذلك عادة في ما يسمى **بالإنحدار المتعدد**، والذي قد يكون ثلاثيا أو رباعيا أو أكثر من ذلك، وذلك بالإعتماد على جبر المصفوفات، و نظرا لعدم تقديم تذكير في المصفوفات ضمن هذا الكتاب فإننا سوف نكتفي فقط خلال البند الموالي بالإنحدار الثلاثي.

2- الإنحدار الثلاثي : كما سبقت الإشارة أعلاه فإن الكثير من المتغيرات الإقتصادية تكون تابعة لمتغيرين مستقلين، وتكون علاقة الإنحدار على النحو التالي:

$$y_i = a + bx_i + cz_i + \varepsilon_i \qquad 32-7$$

حيُث :
y_i : المتغير التابع.
x_i : المتغير المستقل الأول.
z_i : المتغير المستقل الثاني.
ε_i : حد الخطأ.
a، b، c: ثوابت.

و كما هو الشأن بالنسبة للإنحدار الثنائي إذ يستحيل إيجاد الدالة الحقيقية كما هي معرفة أعلاه، فإنه يلجأ الى تقديمها عن طريق دالة مقدرة كما يلي:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i + \hat{c}z_i \qquad 33-7$$

و يتم إيجاد المعالم : $\hat{a}$ ، $\hat{b}$ و $\hat{c}$ بإستخدام طريقة المربعات الصغرى، بنفس المنهجية المستخدمة في الإنحدار الثنائي، إذ يكون الهدف هو تصغير مجموع مربعات إنحرافات القيم المقدرة $\hat{y}_i$ عن القيم الحقيقية y_i ، ويكون ذلك بإيجاد المشتقات الجزئية لمجموع مربعات الإنحرافات و مساواتها الى الصفر، كما جرى في الإنحدار الثنائي، إذ يتم إستنتاج المعادلات التالية :

$$\sum_{i=}^{n} y_i - \hat{b}\sum_{i=}^{n} x_i - \hat{c}\sum_{i=}^{n} z_i - N\hat{a} = 0$$

$$\sum_{i=}^{n} y_i x_i - \hat{b}\sum_{i=}^{n} x_i^2 - \hat{c}\sum_{i=}^{n} z_i x_i - \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=}^{n} y_i z_i - \hat{b}\sum_{i=}^{n} x_i z_i - \hat{c}\sum_{i=}^{n} z_i^2 - \hat{a}\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$$



و حيث أنه لدينا ثلاثة مجاهيل هي : $\hat{a}$، $\hat{b}$ و $\hat{c}$ و ثلاث معادلات، فإنه يمكن إيجاد المجاهيل بإحدى الطرق العادية ويكون :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \sum_{i=1}^{n} x_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2} \qquad 34-7$$

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} x_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2} \qquad 35-7$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} - \hat{c}\bar{z} \qquad 36-7$$

تقيس المعلمة $\hat{b}$ التغير الحاصل في y بالنسبة لتغير مقدارx بوحدة واحدة عند ثبات z، وبالمثل تقيس المعلمة $\hat{c}$ التغير الحاصل في y بالنسبة لتغير z بوحدة واحدة عند ثبات x، وتسمى $\hat{b}$ و $\hat{c}$ بمعاملات الإنحدار الجزئية.

مثال7-4 : البيانات التالية تظهر أسعار محلات تجارية حسب مساحتها وعمر بنائها.

العمر (سنة)	المساحة (م^2)	السعر (10^6)دج
10	40	80
20	80	80
5	60	120
5	20	40
10	45	50
15	90	90
20	100	90
5	110	140

جدول7-4

المطلوب:

1- حدد المتغير التابع مع التوضيح.

2- أوجد معادلة إنحدار السعر على كل من مساحة المحل عمره.

3- بناء على معادلة الإنحدار المحصل عليها، ماهو السعر المتوقع لمحل تجاري مساحته 75 م^2 وعمره 30 سنة.

الإجابة :

1- سعر المحل يتحدد نظريا حسب مساحته و عمره، إذ يتوقع أن يكون السعر مرتفعا كلما كانت مساحته كبيرة، وينخفض كلما كانت مساحته صغيرة، فالعلاقة بين السعر والمساحة هي علاقة طردية، بينما تكون العلاقة بين السعر والعمر عكسية، إذ يتوقع أن يكون سعر المحل منخفضا كلما كبر عمره وأن يكون السعر مرتفعا كلما قل عمره، فإذا رمزنا للسعر بالحرف y وللمساحة بالحرف x و للعمر بالحرف z، فإن معادلة إنحدار السعر على المساحة وعلى العمر تكون على النحو التالي :

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i + \hat{c}z_i$$

2- يتم إيجاد معالم الدالة المشار اليها أعلاه أي أيجاد معادلة الإنحدار عن طريق المعادلات : 7-34، 7-35، 7-36 وبمساعدة الجدول التالي:

i	y_i	x_i	z_i	$y_i\ x_i$	y_iz_i	$x_i\ z_i$	x^2_i	z^2_i
1	80	40	10	3200	800	400	1600	100
2	80	80	20	6400	1600	1600	6400	400
3	120	60	5	7200	600	300	3600	25
4	40	20	5	800	200	100	400	25
5	50	45	10	2250	500	450	2025	100
6	90	90	15	8100	1350	1350	8100	225
7	90	100	20	9000	1800	2000	10000	400
8	140	110	5	15400	700	550	12100	25
مج	**690**	**545**	**90**	**52350**	**7550**	**6750**	**44225**	**1300**

جدول7-5



نجد :

$$\hat{a} = 7$$

$$\hat{b} = 1.43$$

$$\hat{c} = -1.63$$

و بالتالي تكون دالة إنحدار السعر على كل من المساحة والعمر هي :

$$\hat{y}_i = (7 + 1.43x_i - 1.63z_i).10^6 \text{ دج}$$

يعني هـذا أن سـعر المحـل يسـاوي الى 7 مضافـا اليـه جـزءا متعلقـا بالمساحة ومطروحـا منـه جـزء آخـر متعلقـا بـالعمر، ويلاحـظ أن إشارة معامل x_i موجبة لتـدل علـى أن العلاقـة طرديـة بـين السـعر و المسـاحة، بينمـا إشـارة معـامل z_i سـالبة لتـدل علـى العلاقـة العكسية بين السـعر و العمـر.

3- السعر المتوقع لمحل تجاري مساحته 75 م^2 و عمره 30 سـنة يتـم إيجـاده بالتعويض في دالة الإنحدار المحصل عليها و يكون :

$$\hat{y}_i = 7 + 1.43(75) - 1.63(30) = 65.35.10^6 \text{ دج}$$

أي أن سعر المحل سيكون 65.35 مليون دينار

ثانيا: معاملات الإرتباط : كما سبقت الإشارة عند دراسة الإنحدار، فـإن المتغيرات الإقتصادية والإجتماعية كثيرا ما تكون متأثرة ببعضها البعض، وبمعـنى آخر مرتبطة ببعضها البعض غير أن هذا الإرتباط قد يكون قويا أوضعيفا كمـا قد يكون موجبا أو سالبا (انظر الأشكال الواردة في الأمثلة (7-1)، وتقـاس درجة الإرتباط هذه بما يسمى بمعامل الإرتباط، وهو على أنواع حسب عـدد المتغيرات وطبيعتها، وسنتطرق فيما يلي الى كل من معامل الإرتبـاط الخطـي البسيط و معامل الإرتباط الجزئي و كذا معامل إرتباط الرتب.

1- معامل الإرتباط الخطي البسيط: إن درجة شدة العلاقة بين متغـيرين أحدهما تابع والآخر مستقل، تقاس بما يسمى بمعامل الإرتباط الخطي.



تعريف 7-4: اذا كانت لدينا مجموعة الأزواج المرتبة: (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ...، (x_n,y_n)، فان شدة ارتباط المتغيرين ببعضهما البعض، تسمى بمعامل الإرتباط الخطي البسيط، و يرمز له بالحرف : r، ويعطى بالمعادلة التالية:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N.\sigma_x.\sigma_y} \qquad 37-7$$

حيث : σ_x : الإنحراف المعياري لقيم المتغير المستقل، σ_y : الإنحراف المعياري لقيم المتغير التابع (أنظر مقاييس التشتت)

و يتميز معامل الإرتباط بمجموعة من الخواص منها ما يلي :

أ-تتراوح قيمته بين -1 و +1، أي: $1 \geq r \geq -1$

إذا كان : $r = 1$، فإن ذلك يدل على أن العلاقة بين المتغيرين هي علاقة خطية طردية تامة (ارتباط خطي موجب تام).

إذا ما كان : $r = -1$، فإن ذلك يدل على أن العلاقة بين المتغيرين هي علاقة خطية عكسية تامة (ارتباط خطي سالب تام).

إذا كان : $r=0$، فإن ذلك يدل على أنه لاتوجد علاقة خطية بين المتغيرين.

و عموما نقول أن الإرتباط بين المتغيرين هو إرتباط قوي، اذا كان :

$r \geq 0.7$ في حالة الإرتباط الطردي.

$r \leq -0.7$ في حالة الإرتباط العكسي.

ب- إذا كان $\hat{b}$ معامل إنحدار y_i على x_i و $\hat{b}^*$ معامل إنحدار x_i على y_i، حيث:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{b}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

فإن: $r^2 = \hat{b}.\hat{b}^*$

و بالتالي نجد: 7-38

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

أو: 7-39

$$r=\sqrt{b.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

و يمكن إستنتاج أيضا:

$$r=\hat{b}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad 40-7$$

حيث : σ_X : الإنحراف المعياري لقيم المتغير المستقل، σ_y : الإنحراف المعياري لقيم المتغير التابع.

ج- إذا كان : $r=1$ فإن مجموع مربعات فروقات القيم الحقيقية عن القيم المقدرة يكون معدوما أي :

$$\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=0$$

يعني ذلك أن هناك علاقة إرتباط خطي تام بين المتغير التابع و المتغير المستقل.

و إذا كان : $r=0$ فإن مجموع مربعات فروقات القيم الحقيقية عن القيم المقدرة تأخذ أكبر قيمة لها، ويعني ذلك أن المتغيرين مستقلين عن بعضهما البعض أو لاتوجد علاقة إنحدار خطي بينهما.

تجدر الإشارة أخيرا الى أن : r تأخذ نفس اشارة معامل دالة الإنحدار.

مثال7-5: أوجد معامل ارتباط بيانات المثال7-3.



باستخدام المعادلة رقم 7-38 و بمساعدة الجدول التالي نجد:

i	y_i	x_i	$(x_i - x)^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	10	10	306.25	142.28	66.10
2	12	15	156.25	76.63	37.58
3	15	20	56.25	23.48	6.80
4	16	25	6.25	5.33	4.45
5	16	30	6.25	-5.33	4.45
6	20	35	56.25	12.53	2.79
7	26	40	156.25	98.38	61.94
8	30	45	306.25	207.73	140.90
مج	**145**	**220**	**1050.00**	**561.69**	**328.37**

جدول7-6

$$r = \frac{561.69}{\sqrt{1050}.\sqrt{328.37}} = 0.96$$

يعني هـذا أن الارتباط بين المتغيرين الواردات والدخل الداخلي هو ارتباط طردي قوي، كما تعني القيمة :

$r = 0.96$ أو $r= 96\ \%$

أن معادلة الإنحدار تفسر 96 % من التغير الإجمالي في المتغير المستقل أما النسبة المتبقية و هي 4% فإنها تعود الى عوامل متضمنة في حد الخطأ.

2- **معامل الإرتباط الجزئي** : في الإنحدار الثلاثي يكون المتغير التابع دالة في متغيرين مستقلين، يؤثران بدرجة أو أخرى في المتغير التابع، ويكون من المفيد معرفة درجة الإرتباط الصافي للمتغير التابع بكل متغير من المتغيرين المستقلين، ويتم ذلك عن طريق ما يسمى بمعامل الإرتباط الجزئي.

تعريف 7-5 : معامل الإرتباط الجزئي هو أداة لقياس صافي الإرتباط بين متغير تابع، وآخر مستقل بعد حذف التأثير المشترك للمتغيرات المستقلة الأخرى، أي مع تثبيتها.

إذا كانت لدينا دالة الإنحدار المفترضة من الشكل :



$$y_i = a + bx_i + cz_i$$

فإن معاملات الإرتباط الجزئي بين y_i و x_i و z_i على التوالي تعطى كما يلي:

أ- معامل الإرتباط الجزئي بين y و x مع تثبيت z :

$$r_{yx.z} = \frac{r_{yx} - r_{yz}.r_{xz}}{\sqrt{1-r_{xz}^2}.\sqrt{1-r_{yz}^2}} \qquad 41-7$$

ب- معامل الإرتباط الجزئي بين y و z مع تثبيت x :

$$r_{yz.x} = \frac{r_{yz} - r_{yx}.r_{xz}}{\sqrt{1-r_{xz}^2}.\sqrt{1-r_{yx}^2}} \qquad 42-7$$

حيث : r_{yx} : معامل الإرتباط البسيط بين المتغيرين y وx.

r_{yz} : معامل الإرتباط البسيط بين المتغيرين y و z

r_{xz}: معامل الإرتباط البسيط بين المتغيرين x وz.

كما هو الشأن بالنسبة للإرتباط البسيط فإن معامل الإرتباط الجزئي تتراوح قيمته أيضا بين -1 و +1 و تأخذ نفس إشارة المعلمة المقابلة في دالة الإنحدار.

مثال7-6: أوجد معاملات الإرتباط الجزئي لبيانات المثال 7-4.

الإجابة :

أ- معامل الإرتباط الجزئي بين y و x مع تثبيت z، أي $r_{yx.z}$ يتم إيجاده بإستخدام المعادلة رقم :7-41، حيث نجد :

$r_{xz}= 0.43$ $\qquad$ $r_{yz}=-0.14$ $\qquad$ $r_{yx}= 0.73$

و بالتالي يكون : $r_{yx.z}= 0.88$

ب- معامل الإرتباط الجزئي بين y و z مع تثبيت x، أي $r_{yz.x}$، يتم إيجاده بإستخدام المعادلة رقم : 7-42، حيث نجد: $r_{yz.x}= -0.74$

تعني العبارة : $r_{yx.z}= 0.88$ بعد أن يكون عمر المحل قد فسر ما يستطيع من التغير في السعر، فإن المساحة تفسر حوالي 88 % من التغير المتبقي في السعر. و بالمثل يفسر $r_{yz.x}$ ، غير أن العلاقة طردية بين السعر و المساحة لكون إشارة معامل الإرتباط الجزئي موجبة،



وعكسية بين السعر و العمر لكون إشارة معامل الإرتباط سالبة.

3-معامل إرتباط الرتب : في بعض الحالات تكون لدينا بيانات وصفية يمكن التمييز بينها بمعرفة رتبتها، كأن تكون لدينا مجموعة من المواد يمكن للمستهلك أن يرتبها حسب أهميتها بالنسبة له، و في مثل هذه الحالات لايمكن إيجاد معامل الإرتباط كما تم تقديمه آنفا، لكن يتم إيجاد معامل **سبيرمان للرتب** و الذي يعطى عن طريق المعادلة التالية :

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{N(N^2 - 1)} \qquad 43-7$$

حيث: d_i الفرق بين ترتيب x و y.

وبحيث يكون هذا الترتيب تنازليا، أي أن أكبر قيمة تأخذ الرتبة 1، وأقل قيمة تأخذ الرتبة الأخيرة.

و يصلح إستخدام معامل إرتباط الرتب خاصة إذا ما كان N يتراوح بين 25 و30، وتكون قيمته أيضا محصورة بين: +1 و -1.

مثال7-7: أوجد معامل ارتباط الرتب للبيانات التالية :

x	25	20	30	45	10	17	23	21
y	70	47	73	40	45	50	48	63

جدول7-7

الإجابة : يكون ترتيب القيم x و y على النحو التالي :

ترتيبx	3	6	2	1	8	7	4	5
ترتيبy	2	6	1	8	7	4	5	3

جدول7-8

وتتم بقية الحسابات من خلال الجدول التالي :

ترتيبx	3	6	2	1	8	7	4	5	مج
ترتيبy	2	6	1	8	7	4	5	3	
d_i	1	0	1	-7	1	3	-1	2	
d_i^2	1	0	1	49	1	9	1	4	66

جدول7-9



بتطبيق المعادلة أعلاه نجد :
$$r = 1 - \frac{6(66)}{8.(64-1)} = 0.21$$

و هو إرتباط ضعيف.

تستخدم هذه الطريقة في حالة ما إذا كانت البيانات غير متساوية، أما إذا كان البعض منها متساو، فاننا نتبع الخطوات التالية :

1- نرتب القيم ونعطي لكل قيمة ترتيبا، كما لو أن ليس فيها قيم متساوية، بحيث أكبر قيمة تأخذ الرتبة 1 والقيمة الأقل تأخذ الرتبة الأخيرة.

2- نوجد الوسط الحسابي لرتب كل مجموعة من البيانات المتساوية، ونعطي لكل قيمة من القيم المتساوية ترتيبا يساوي هذا الوسط.

مثال7-8: أوجد معامل إرتباط الرتب للبيانات التالية :

x	25	20	30	45	20	17	20	25
y	70	45	73	40	45	50	45	63

جدول7-10

نلاحظ أنه توجد قيم متساوية في كل من المتغيرين x و y، لذلك نقوم بإيجاد متوسط الرتب للقيم المتساوية بعد ترتيبها، ونعطي كل قيمة من القيم المتساوية رتبة تساوي هذا المتوسط و ذلك عند موقعها الأصلي وذلك كما هو واضح في الجدول 7-11.

بالنسبة للمتغير x مثلا، نجد أن القيمة 20 مكررة 3 مرات ترتيبها على التوالي هو : 5، 6، 7 لذلك يكون متوسط هذه الرتب هو : $(5+6+7)\backslash 3 = 6$ لذلك نعطي كل قيمة تساوي 20 عند موقها في الجدول الأصلي ترتيبا يساوي 6، ونقوم بنفس الطريقة بالنسبة للقيم المتساوية الأخرى.

ترتيبx	3.5	6	2	1	6	8	6	3.5	مج
ترتيبy	2	6	1	8	6	4	6	3	
d_i	1.5	0	1	-7	0	4	0	0.5	
d^2_i	2.25	0	1	49	0	16	0	0.25	**68.5**

جدول7-11

و بتطبيق المعادلة رقم 7-43 نجد :
$$r = 1 - \frac{6(68.5)}{8(64-1)} = 0.18$$

تمارين.

تمرين 1:البيانات التالية تظهر تطور أسعار مادة ما بالدينار و الكميات المطلوبة منها في إحدى المدن بمئات الأطنان :

i	السعر	الكمية
1	80	130
2	85	130
3	87	125
4	100	120
5	110	90
6	123	80
7	140	72
8	135	70

المطلوب :1-حدد المتغير التابع والمتغير المستقل.

2-على معلم متعامد ارسم شكل الانتشار. ماذا تستنتج؟

3-أوجد معادلة انحدار الكميات على الأسعار، وفسرها.

4-أوجد الانحراف المعياري للأسعار وللكميات وفسره.

5- أوجد معامل الارتباط الخطي و فسره.

6- ماهي الكميات المتوقع استهلاكها عند الأسعار : 180 و 50 دينار على التوالي.

تمرين2: البيانات التالية تظهر تطور عدد السكان و عدد المواليد الأحياء (الزيادة الطبيعية) في الجزائر بين سنتي 1990 و 2002 في الجزائر.

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
عدد السكان 10^6 نسمة	25.0	25.6	26.3	26.9	27.4	28.0	28.6
المواليد الأحياء 10^3	624	618	639	607	596	531	482
السنة	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	
عدد السكان 10^6 نسمة	29.0	29.5	30.0	30.4	30.8	31.2	
المواليد الأحياء 10^3	476	464	452	449	478	479	

المطلوب: 1- ما هو المتغير التابع و ماهو المتغير المستقل.

2- إرسم شكل الإنتشار، ماذا تستنتج؟

3- أوجد معادلة إنحدار المواليد على عدد السكان.



4- ما هو عدد المواليد المتوقع إذا ارتفع عـــدد الســـكان الى 35 مليون نسمة في سنة 2007.

تمرين3 : البيانات التالية تظهر تطور عدد السكان و عدد منـــاصب العمـــل المحققة في الجزائر خلال الفترة 1990-2001 حسب مصادر الديـــوان الوطـــني للإحصائيات.

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995
عدد السكان 10^6 نسمة	25.0	25.6	26.3	26.9	27.4	28.0
مناصب العمل	60498	42219	36668	35431	36985	41463
السنة	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**
عدد السكان 10^6 نسمة	28.6	29.0	29.5	30.0	30.4	30.8
مناصب العمل	32110	24830	26664	22377	22215	23696

المطلوب:1- ما هو المتغير المستقل و المتغير التابع؟

2- إرسم شكل الإنتشار. ماذا تستنتج؟

3- أوجد معادلة إنحدار مناصب العمل المنشأة على عدد السكان.

تمرين4: البيانات التالية تظهر تطور كل من الإنتـــاج الداخلـــي الإجمـــالي والواردات، خلال الفترة 76-1987 للجمهورية الجزائرية حسب أرقام الديوان الوطني للإحصائيات ، بملايير الدينارات.

السنة	الواردات	انتاج د.إ
1976	28.43	68.50
1977	37.27	81.90
1978	41.99	104.00
1979	46.47	128.50
1980	55.84	162.50
1981	65.99	191.50

السنة	الواردات	انتاج د.إ
1982	68.32	207.60
1983	66.72	239.80
1984	68.16	259.90
1985	65.06	289.20
1986	55.79	286.50
1987	48.88	307.90



1-الإنتاج الداخلي الإجمالي، والواردات السلعية متغيرتين إقتصاديتين، أيـــهما متغير تابع وأيهما متغيرمستقل، حسب أصول النظرية الإقتصادية.

2- قدم البيانات المجدولة في شكل بياني مناسب. ماذا تستنتج؟.

3- إذا كانت الواردات السلعية دالة خطية في الناتج الداخلي الإجمالي، مـــاهي صيغتها العامة؟

4- بناء على السؤال 3، أوجد الدالة المقدرة للواردات السلعية، وفسر معالمـــها المقدرة.

5- أوجد درجة الإرتباط بين المتغيرتين، وفسرها.

6- إذا حددت قيمة الناتج الداخلي الإجمالي سنة 2006 بـــ: 1200 مليـلو دج، أوجد الواردات المتوقعة خلال تلك السنة.

تمرين5: البيانات التالية تظهر تطور الكميات المستهلكة من مادة القـهوة Q_1 والكميات المستهلكة من مادة السكر Q_2، وسعر القنطار الواحد من مـــــادة السكر p، خلال الفترة 1998 \ 2005 في دولة ما.

السنة	Q_1 10^3 قنطار	Q_2 10^3 قنطار	p د ج/قنطار
1998	20	10	100
1999	30	17	107
2000	35	20	110
2001	40	30	120
2002	55	43	133
2003	50	50	140
2004	65	65	155
2005	60	75	165

المطلوب: 1-الكميات المستهلكة من القهوة والسكر متغيرتين إقتصـــاديتين، أيهما متغـــير تابع وأيهما متغير مستقل. وضح.

2- على معلم متعامد أرسم شكل إنتشار كميات السكر على كميات القهوة. ماذا تستنتج ؟



3- أوجد معادلة انحدار Q_2 على Q_1 وفسرها. ثم ارسمها على المعلم المطلوب في السؤال2.

4-اشرح معامل الارتباط واحسبه لمتغيرتي السؤال 1.

5-أوجد شكل انتشار الكميات المستهلكة من السكر على السعر.ماذا تستنتج؟

6- باستعمال الطريقة الهندسية أوجد انحدار الكميات المستهلكة من السكر على الثمن. فسرها.

7-أوجد القيمة التنبؤية لإستهلاك السكر عندما يصبح السعر 200 دينار للقنطار.

8- إذا كان سعر السكر دالة في الكميات المستهلكة من المادتين أوجد الدالة المقدرة للسعر بدلالة كميات المادتين. 9- أوجد معاملات الإرتباط الجزئي وفسرها.

تمرين6:إذا كانت لدينا المعادلتين الطبيعيتين:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0$$

إثبت أنه يمكن كتابة $\hat{b}$ و $\hat{a}$ المقدرتين بطريقة المربعات الصغرى على نحو المعادلات التالية:

$$\boxed{\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$



$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

تمرين 7 : إذا كانت معادلة الإرتباط الخطي على النحو:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N.\sigma_x.\sigma_y}$$

حيث : σ_X : الإنحراف المعياري لقيم المتغير المستقل، σ_Y : الإنحراف المعياري لقيم المتغير التابع.

المطلوب: إثبت أنه يمكن كتابة معامل الإرتباط أيضا على النحو:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

و على النحو:

$$r = \sqrt{\hat{b}.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$



أو :
$$r = \hat{b}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

تمرين8 :إليك البيانات التالية :

$$\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2 = 49748$$
$$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 4127.5$$
$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 817$$
$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 860$$
$$r = 0.95$$

المطلوب: 1- أوجد دالة الإنحدار الخطي المقدرة بناء على هذه المعطيات.

3-أوجد الإنحراف المعياري لقيم المتغيرين التابع و المستقل.



الفصل الثامن

السلاسل الزمنية.

الكثير من الظواهر الإقتصادية والإجتماعية، تكون ذات تغيرات شهرية أوفصلية أوسنوية، نتيجة لتوافر مجموعة من الظروف في وقت معين، لو تتبعنا الإحصائيات المتعلقة بالكميات المستهلكة من الغاز مثلا، لوجدنا أن الكميات المستهلكة منه ترتفع شتاء، ثم تبدأ في الإنخفاض تدريجيا مع بداية فصل الربيع، لتصل الى أدنى كمية مستهلكة صيفا، ثم تبدأ الكميات المستهلكة في التزايد مع بداية فصل الخريف، وتتكرر تقريبا نفس الوتائر عبر فصول السنة، في مثل هذه الحالات تكون المتغيرة الإقتصادية مرتبطة بالفترات الزمنية، وتشكل مجموعة البيانات المحصل عليها لمثل هذه الظواهر ما يسمى بالسلسلة الزمنية.

تعريف 8-1: السلسلة الزمنية لظاهرة ما هي عبارة عن مجموعة من مشاهدات تلك الظاهرة مأخوذة خلال فترات زمنية متتابعة وذات أبعاد متساوية، إذا كانت هذه المشاهدات هي :

y_1 ، y_2 ،y_3 ... y_n ، مأخوذة خلال الفترات:

$t = 1 , 2 , 3 ... n$ على التوالي، فإن الدالة الزمنية للظاهرة هي :

$$y_t = f(t) \qquad 1-8$$

حيث : y_t : تسمى بالمتغير التابع . t : المتغير المستقل.

وقد تكون الفترات الزمنية مقاسة بالسنة أو أجزائها، أوأضعافها.

تهدف دراسة السلسلة الزمنية لظاهرة ما، الى تحديد كيفية تغير تلك الظاهرة عبر الزمن، والى تحديد دورات تلك التغيرات، ومعرفة أسبابها ونتائجها، وكذا التخمين المستقبلي لتطورها.

عمليا الكثير من شؤون التسيير في مختلف المؤسسات الإنتاجية والتجارية والإجتماعية، تستخدم السلاسل الزمنية سواء في توقعات الإنتاج أو المبيعات أو الإتجاه المستقبلي لظواهرها، الشيء الذي يسمح للقائمين على هذه المؤسسات بإتخاذ التدابير اللازمة لمواجهة أي طارئ.

أولا: أشكال تغيرات السلسلة: لتحديد طبيعة السلسلة الزمنية، يتم إعداد معلم متعامد، توضع على محوره الأفقي الفترات الزمنية، وعلى محوره العمودي قيم الظاهرة إنطلاقا من معطيات إحصائية معينة، وعند إيصال نقاط الأزواج المرتبة (t ،y)، تظهر لنا طبيعة السلسلة الزمنية، التي قد تأخذ طبيعة تغيراتها عدة أشكال منها ما يلي :

1- تغيرات طويلة المدى : في مثل هذه الحالة يكون منحنى السلسلة غير متذبذب كثيرا، اذ تظهر عليه تموجات بسيطة متزايدة و متناقصة، على فترات زمنية طويلة ، وأهم ما يميزها أنها تستمر في إتجاه واحد لمدة طويلة من الزمن، سواء كان هذا الإتجاه متزايدا أو متناقصا، وإذا حدث وأن تغير إتجاهها، فإنها ستبقى على هذا الإتجاه الجديد لفترة زمنية أخرى طويلة، ولعل أهم العوامل المؤثرة في منحنى مثل هذه التغيرات، خاصة إذا ما كانت الظاهرة تتعلق بكميات على المستوى الكلي، هو عدد السكان والتقدم التكنولوجي.

2- التغيرات الموسمية: في هذه الحالة تكون التغيرات دورية حسب أوقات معينة منتظمة، إذ يمكن أن تكون هذه التغيرات فصلية أي حسب الفصول الأربعة، أوشهرية . . . وقد تكون أسبوعية أو يومية، ومن العوامل الأكثر أهمية في إحداث التغيرات الموسمية، هي الطقس والعادات والتقاليد.

3-التغـــيرات الدوريـــة: تتمـــيز بوجـــود تغـــيرات دورية، ملاحظـــة علـــى فـــترات زمنيـــة طويلـــة نســـبيا، تتكـــرر كـــل عـــدة ســـنوات، وهـــي تغـــيرات أطـــول مـــن التغـــيرات الموسميـــة، وطـــول الدورة يكون غير معلـــوم وغـــير منتظـــم.

4- التغـــيرات العشـــوائية : و هـــي التغـــيرات غـــير المنتظمـــة الـــتي تقـــع علـــى الظـــاهرة، بســـبب حالـــة طارئـــة غـــير متوقعـــة، وهـــي لاتحكمها قوانين أو قواعـــد معينـــة و بالتـــالي لايمكـــن توقـــع حدوثـــها مسبقا وهي لاتستمر فـــترة زمنيـــة طويلـــة، ومـــن أهـــم العوامـــل الـــتي تـــؤدي إلى حـــدوث مثـــل هـــذه التغـــيرات، الإضرابـــات، الحرائـــق، الأحوال الجويـــة.

ثانيـــا : الخشـــونة : إن المنحـــنى البيـــاني للسلســـلة الزمنيـــة، يمكـــن أن يأخذ عدة أشـــكال، إذ قـــد يكـــون شـــديد الإنكســـار، وقـــد يكـــون ضعيـــف الإنكســـار، أي أملـــس، والواقـــع أنـــه كلمـــا كـــان المنحـــنى أملسا أي أكـــثر تمـــهدا، كلمـــا أمكـــن أخـــذ فكـــرة واضحـــة، عـــن الإتجاه العام للسلسلة، و تقـــاس درجـــة إنكســـار المنحـــنى عـــن طريـــق ما يسمى بمعامل الخشونة، الـــذي يعطـــى بالمعادلـــة التاليـــة :

$$c = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} \qquad 2-8$$

حيث : y_t : قيمـــة الظـــاهرة في الفـــترة : t .

y_{t-1}: قيمـــة الظـــاهرة في الفـــترة :$t-1$

$\bar{y}$:الوسط الحســـابي لقيـــم الظـــاهرة.

إذا كـــان : c كبـــيرا دل ذلـــك علـــى شـــدة أنكســـار منحـــنى السلسلة، وبالتـــالي صعوبـــة تحليـــل البيانـــات، وإذا مـــا كـــان صغـــيرا،



دل ذلـك علـى أن السلسـلة ملسـاء، أي منحناهـا ذو إنكسـارات ضعيفـة.

مثال8-1: البيانـات التاليـة تظـهر تطـور انتـاج الحبـوب في مزرعـة ما، خلال الفـترة 2000-2006 بـآلاف القناطـير.

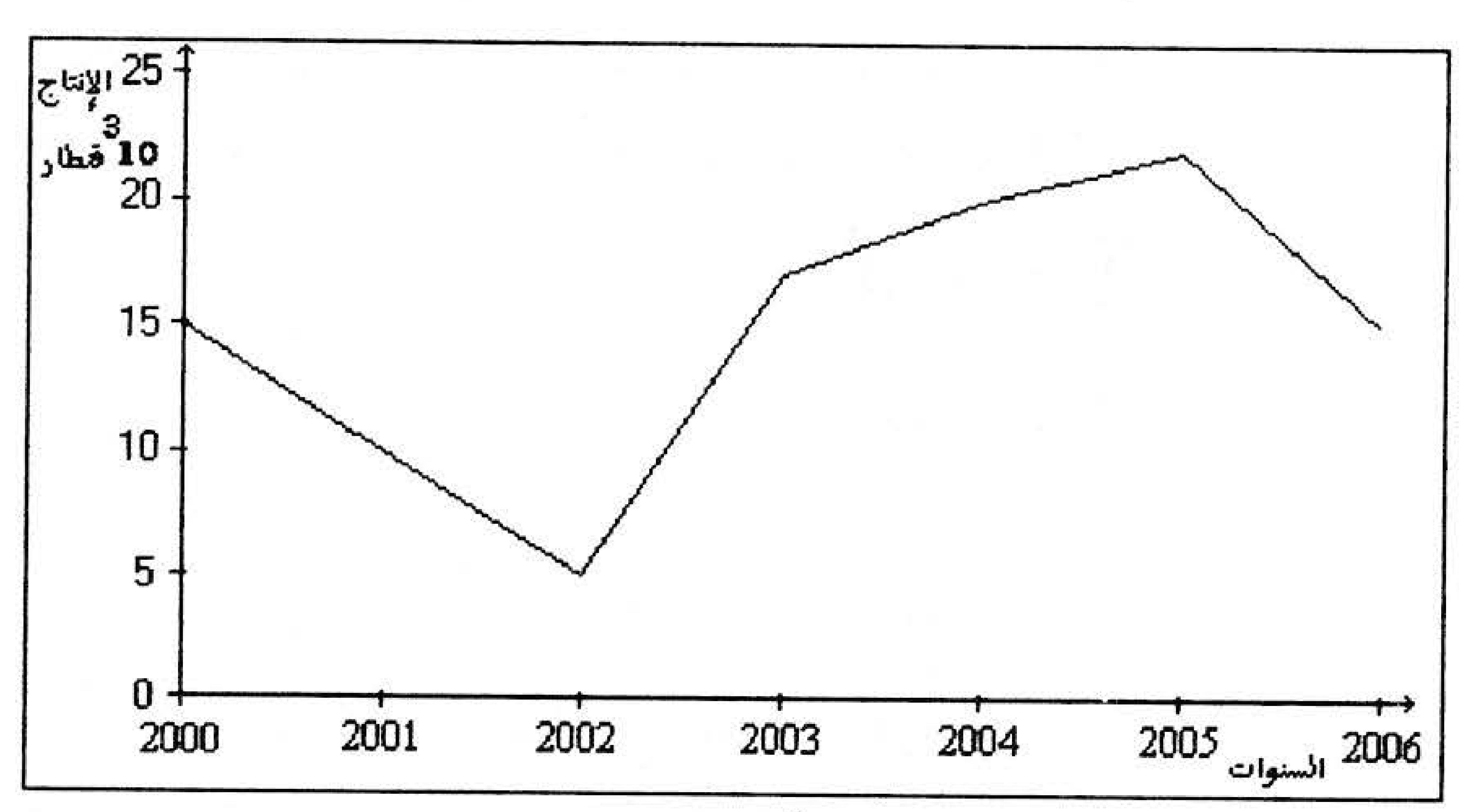
السنة	الإنتاج
2000	15
2001	10
2002	5
2003	17
2004	20
2005	22
2006	16

جدول8-1

المطلوب: على معلم متعامد قدم هذه البيانات، ثم أوجد معامل خشونتها.

الجواب: المنحنى البياني التالي يظهر تطور إنتاج الحبوب، خلال الفترة:2000-2006

تطور إنتاج الحبـوب خـلال الفـترة 2000\2006



شكل8-1

لإيجاد معامل الخشونة يتم استخدام المعادلة رقم 8-2 أعلاه، وبمساعدة الجـدول التالي :

السنة	t	y_t	$(y_t - y_{t-1})$	$(y_t - y_{y-1})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
2000	1	15	-	-	0
2001	2	10	-5	25	25
2002	3	5	-5	25	100
2003	4	17	12	144	4
2004	5	20	3	9	25
2005	6	22	2	4	49
2006	7	16	-6	36	1
مج		**105**		**243**	**204**

جدول8-2

نجد:

الوسط الحسابي للإنتاج : $\bar{y} = \frac{105}{7} = 15$ (10^3 قنطار)

معامل الخشونة: $c = \frac{243}{204} = 1.19$

تدل هذه القيمة أن السلسلة ليست خشنة بشكل كبير .
واضح أنه إذا ما كان معامل الخشونة كبيرا، فإنه يصعب تحديد الإتجاه العام للسلسلة الزمنية، لذلك يلجأ الى إستخدام احدى الطرق الآتي ذكرها لتقدير اتجاهها.

ثالثا: تقدير الإتجاه العام للسلسلة: يأخذ الإتجاه العام للسلسلة عدة أشكال، منها الشكل الخطي وشبه الخطي، والشكل الأسي و غيره.

1- الشكل الخطي و شبه الخطي: يتم تحديد الإتجاه العام في هذه الحالة بعدة طرق منها ما يلي:

أ- طريقة النقاط الوسطية : يتم على معلم متعامد تجسيم سلسلة البيانات، ثم نحدد النقاط p_i التي تمثل الإنكسارات العلوية و نصل بينها، فنحصل على ما يسمى بخط السقف، نحدد النقاط b_i التي تمثل الإنكسارات السفلية ونصل بينها، فنحصل على ما يسمى بخط الأرضية، و إنطلاقا من نقاط



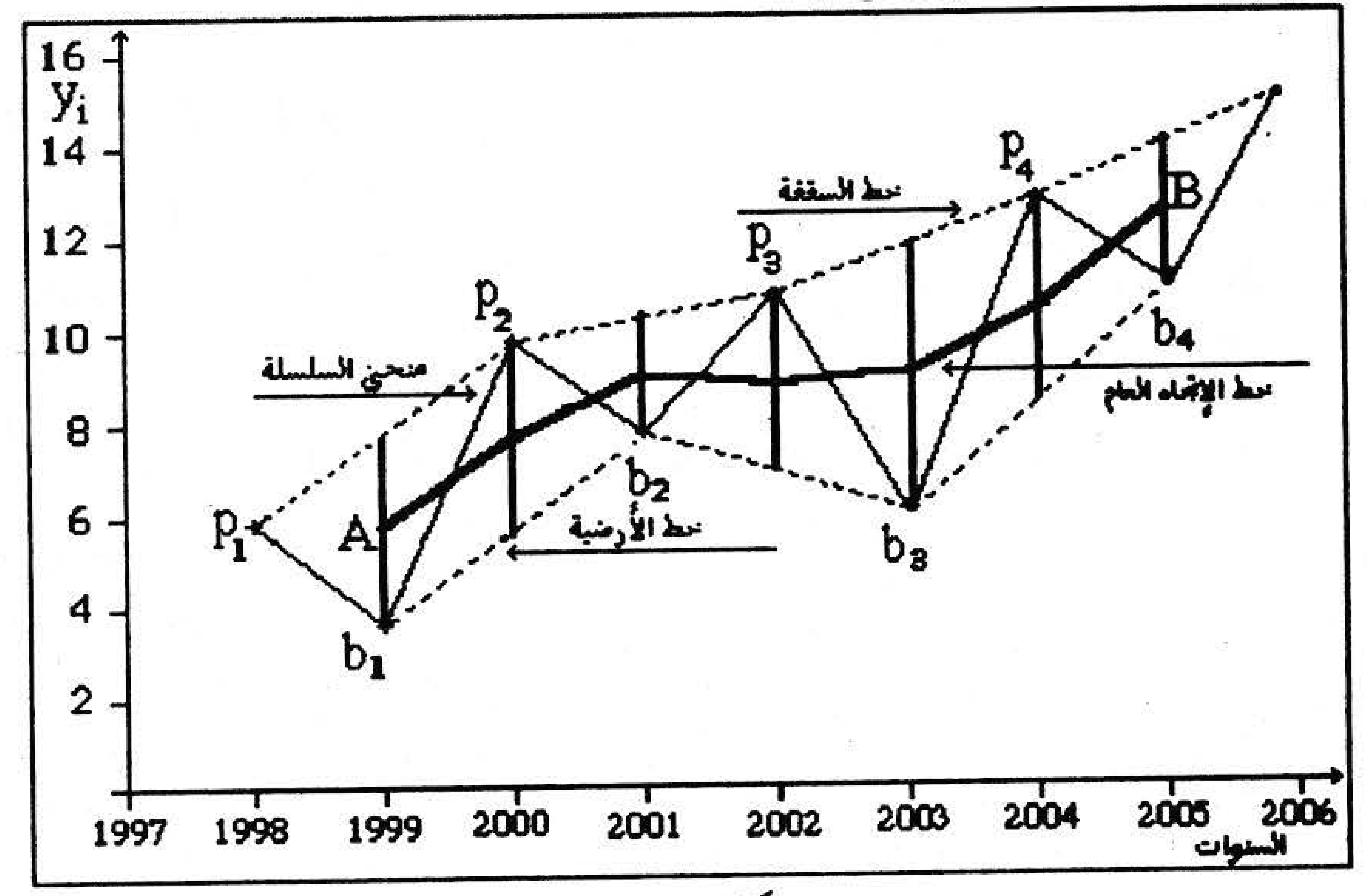
الإنكسارات العلوية نترل شاقول على خط الأرضية، وإنطلاقا من نقاط الإنكسارات السفلية نصعد شاقول على خط السقف، ثم نحدد النقاط التي تمثل منتصف هذه الشاقولات ونصل بينها، فنحصل بذلك على خط يمثل الإتجاه العام للسلسلة .

مثال8-2: أوجد خط الإتجاه العام بإستعمال طريقة النقاط الوسطية للبيانات التالية و التي تمثل تطور إنتاج إحدى المؤسسات بآلاف القناطير.

السنة	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
الإنتاج	6	4	10	8	11	6	13	11	15

جدول8-3

الإجابة : نرسم البيانات على معلم متعامد، و نقوم بالخطوات المحددة أعلاه فنحصل على الخط A B الذي يمثل الإتجاه العام للسلسلة، كما هو واضح في الشكل8-2.



شكل8-2



ب- طريقة المعدلات المتحركة:

تعريف 8-2: إذا كانت لدينا البيانات :

y_1 ، y_2 ، y_3 … y_n، مأخوذة خلال الفترات :

n . . . 3 , 2 , t=1 ، على التوالي، فإن المعدلات المتحركة بطول m، لهذه السلسلة تعطى كما يلي :

المعدل المتحرك الأول :

$$y_1^* = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m}{m}$$

المعدل المتحرك الثاني :

$$y_2^* = \frac{y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{m+1}}{m}$$

المعدل المتحرك الثالث :

$$y_3^* = \frac{y_3 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{m+2}}{m}$$

ويستمر إيجاد المعدلات المتحركة حتى نصل الى المعدل المتحرك الأخير، حيث يكتب :

$$y_{n-m+1}^* = \frac{y_{n-m+1} + y_{n-m+2} + y_{n-m+3} + \ldots + y_n}{m}$$

ويكون عدد المعدلات المتحركة المحصل عليها في النهاية مساويا الى:

$$n-m+1 \qquad 3-8$$

حيث n: عدد القيم . m طول المعدل المتحرك، ويفضل أن يكون عددا فرديا.

و تكون السلسلة المحصل عليها بإستخدام المعدلات المتحركة أكثر ملوسة من السلسلة الأصلية، نستطيع من خلالها تخمين الإتجاه العام للسلسلة .

والجدير بالذكر هو أن طول الفترة التي يتعين إتخاذها أساسا لحساب المعدلات المتحركة، تتوقف على طبيعة البيانات ذاتها، ونشير الى أنه كلما كان طول المعدل المتحرك قصيرا كلما أمكن الحصول على خط

للإتجاه العام أحسن، لكنه أكثر تموجا لدرجة أنه يتطابق مع خط البيانات الأصلية إذا ما كان طول المعدل المتحرك يساوي الواحد، و العكس كلما كان طول المعدل المتحرك كبيرا كلما كان خط الإتجاه المحصل عليه أكثر ملوسة أي أقل تموجا من منحنى البيانات الأصلية، و لتجنب مشكلة تحديد الفترة التي يقابلها المعدل المتحرك، فانه يستحسن أن يكون طوله فرديا، حتى تكون قيمته مقابلة للفترة الوسيطة لقيم الفترات التي يتكون منها المعدل المتحرك.

مثال8-3: من بيانات المثال 8-2 أوجد الإتجاه العام للسلسلة بإستخدام طريقة المعدلات المتحركة بطول 3.

الجواب : بإستخدام القاعدة المشار اليها أعلاه نحصل على قيم المعدلات المتحركة بطول 3 كما هي واضحة في العمود الثالث من الجدول التالي:

السنة	y_t	y^*
1998	6	
1999	4	6.66
2000	10	7.33
2001	8	9.66
2002	11	8.33
2003	6	10
2004	13	10
2005	11	13
2006	15	

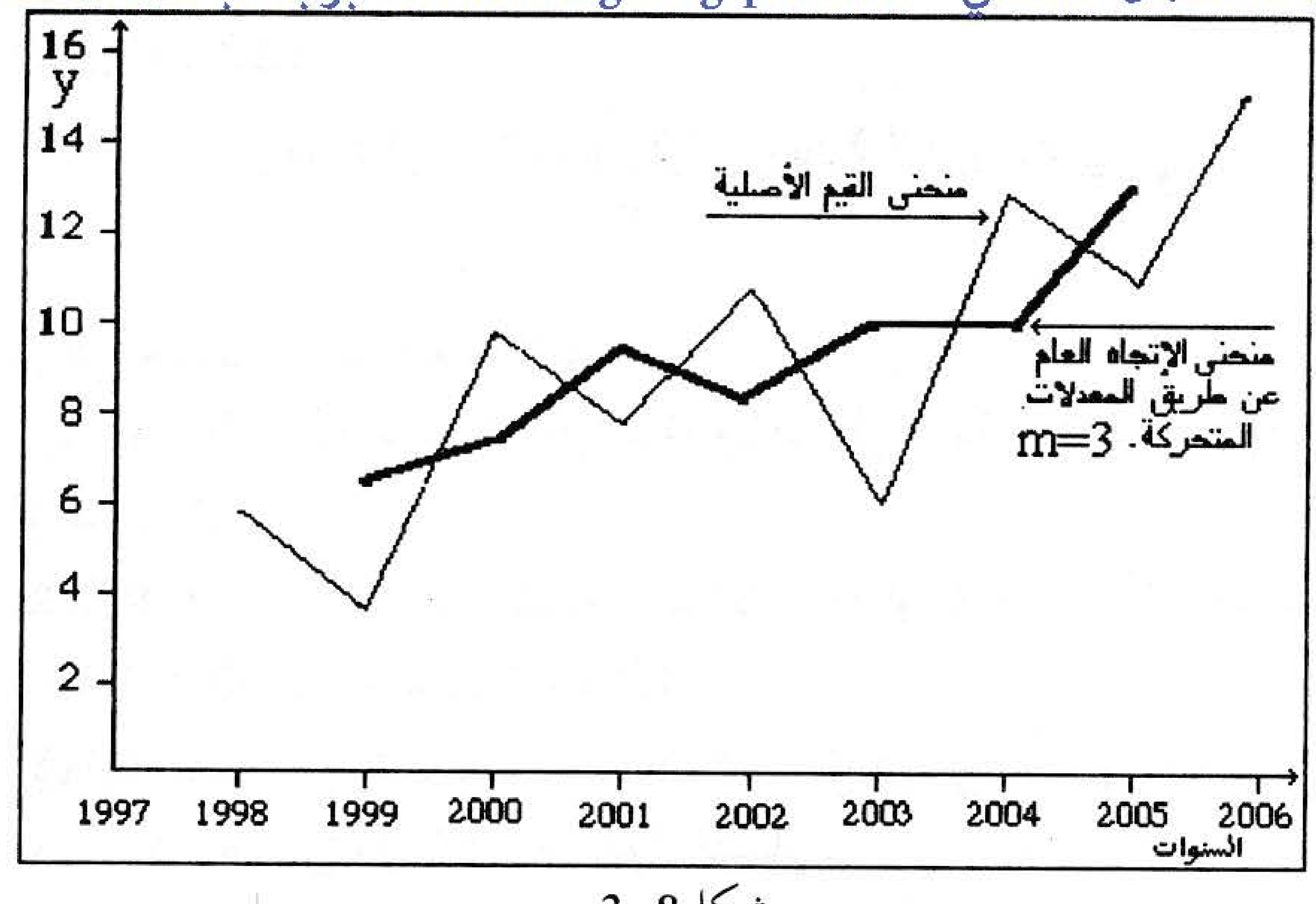
جدول8-4

$$y^*_1 = (6+4+10)/3 = 6.66$$
$$y^*_2 = (4+10+8)/3 = 7.33$$

و بالمثل تم إيجاد بقية المعدلات المتحركة.

عند رسم البيانات الأصلية والبيانات المحصل عليها بإستخدام طريقة المعدلات المتحركة، يظهر منحنى الإتجاه العام للسلسلة بوضوح أكثر، إذ أن إنكسارات السلسلة الأصلية تختفي وتظهر سلسلة المعدلات المتحركة أقل خشونة، وذلك ما يظهره الشكل الموالي:





شكل8-3

ج- طريقة المعدلات الجزئية : في هذه الطريقة يتم تقسيم السلسلة الى مجموعة من السلاسل الجزئية، بطول m، ثم يتم إيجاد متوسطات هذه السلاسل . تجسد هذه المتوسطات على معلم متعامد ويوصل بينها فنحصل بذلك على منحنى الإتجاه العام، وهو منحنى أقل خشونة من المنحنى الأصلي .

تعريف8-3: إذا كانت لدينا السلسلة : $y_1 , y_2 , y_3 ... y_n$، فإن معدلاتها المتدحرجة بطول m تعرف كما يلي :

المعدل الأول:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_m}{m}$$

المعدل الثاني:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_{m+1} + y_{m+2} + y_{m+3} + ... + y_{m+m}}{m}$$



المعدل الثـــالث:

$$\bar{y}_3 = \frac{y_{2m+1} + y_{2m+2} + y_{2m+3} + \ldots + y_{2m+m}}{m}$$

.

وبالمثل تحسب بقيـــة المعـــدلات.

حيث m : طول السلســـلة الجزئيـــة، ويفضـــل أن يكـــون فرديـــا ومـــن قواســـم N.

مثـــال8-4: بإســـتخدام طريقـــة المعـــدلات الجزئيـــة بطـــول 3، حـــــدد خط الاتجاه العـــام لسلســـلة المثـــال8-2.

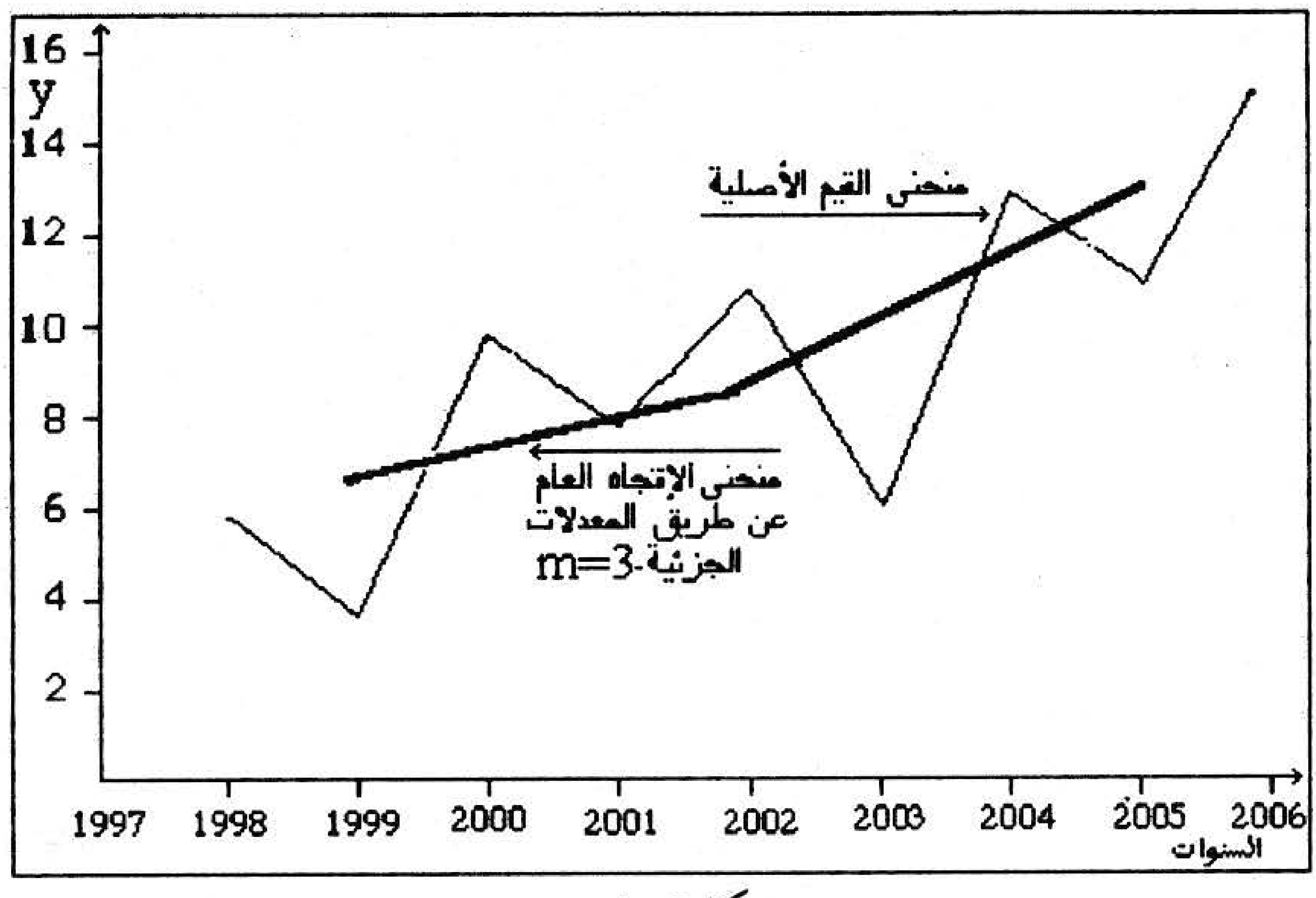
الإجابة: باستخدام القـــاعدة أعـــلاه نحصـــل علـــى جـــدول المعـــدلات الجزئية كما هـــي واردة في الجـــدول التـــالي:

السنة	y_t	$\bar{y}_i$
1998	6	
1999	4	**6.66**
2000	10	
2001	8	
2002	11	**8.33**
2003	6	
2004	13	
2005	11	**13**
2006	15	

جدول8-5

عند تجســـيم البيانـــات المحصـــل عليـــها نجـــد الإتجـــاه العـــام للسلســـلة، كما يحـــدده الشـــكل 8-4





شكل8-4

يلاحظ أن المنحنى المحصل عليه، يكاد يكون مستقيما، وهو يحدد الإتجاه العام للسلسلة بكل وضوح.

د- طريقة المتوسطات النصفية: في هذه الطريقة يتم فصل البيانات الى قسمين متساويين، نوجد الوسط الحسابي لبيانات القسم الأول، ونوجد كذلك الوسط الحسابي لبيانات القسم الثاني، نحدد نقطتي الوسطين على معلم متعامد ونصل بينهما فنحصل على خط مستقيم، يحدد الإتجاه العام للسلسلة.

تستخدم هذه الطريقة فيما لو استنتج الباحث أنه يمكن تمثيل البيانات عن طريق خط مستقيم.

هـ- طريقة المربعات الصغرى : في هذه الحالة يفترض أن تكون السلسلة دالة خطية في الزمن، من الشكل :

$$y_t = a + bt \qquad 4-8$$

حيث : $t = 0 , 1 , 2 ... n-1$

بحيث نعطي الفترة الأولى : $t=0$، الفترة الثانية : $t=1$ ... الفترة الأخيرة: $t=n-1$



وتقدر معالم الدالة :b و a بطريقة المربعات الصغرى، عن طريق معادلتين مشابهتين لمعادلات تقدير معالم خط الإنحدار رقم 7-6 و 7-7، أي :

خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة. 5-8

$$a = \bar{y} - b\bar{t} \qquad 6-8$$

حيث :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} y_t}{N} \qquad 7-8$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} t}{N} \qquad 8-8$$

مثال8-5 : البيانات التالية تعرض تطور صادرات المحروقات خلال الفترة 1998-2006 بملايين الدينارات لدولة ما.

المطلوب أوجد خط الاتجاه العام لهذه البيانات، وأوجد القيم المقدرة (القيم الإتجاهية) للصادرات:

السنة	الصادرات
1998	35
1999	39
2000	41
2001	46
2002	47
2003	50
2004	52
2005	56
2006	60

جدول8-6

بأخذ سنة 1998 كنقطة أصلية، وبتطبيق مبدأ المربعات الصغرى في إيجاد معالم الدالة : $y_t = a + b_t$. ومن خلال الجدول التالي نجد:



السنة	y_t	t	$(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})$	$(t-\bar{t})^2$	القيم الإتجاهية
1998	35	0	49.33	16	35.53
1999	39	1	25.00	9	38.48
2000	41	2	12.67	4	41.43
2001	46	3	01.33	1	44.38
2002	47	4	00.00	0	47.33
2003	50	5	02.67	1	50.28
2004	52	6	09.33	4	53.23
2005	56	7	26.00	9	56.18
2006	60	8	50.67	16	59.13
مج	**426**	**36**	**177.00**	**60**	

جدول8-7

$$\sum_{t=0}^{8} t = 36 \Rightarrow \bar{t} = 4$$

$$\sum_{t=0}^{8} y_t = 426 \Rightarrow \bar{y} = 47.33$$

$$\sum_{i=0}^{8} (y_t - \bar{y})(t - \bar{t}) = 177$$

$$\sum_{i=0}^{8} (t - \bar{t})^2 = 60$$

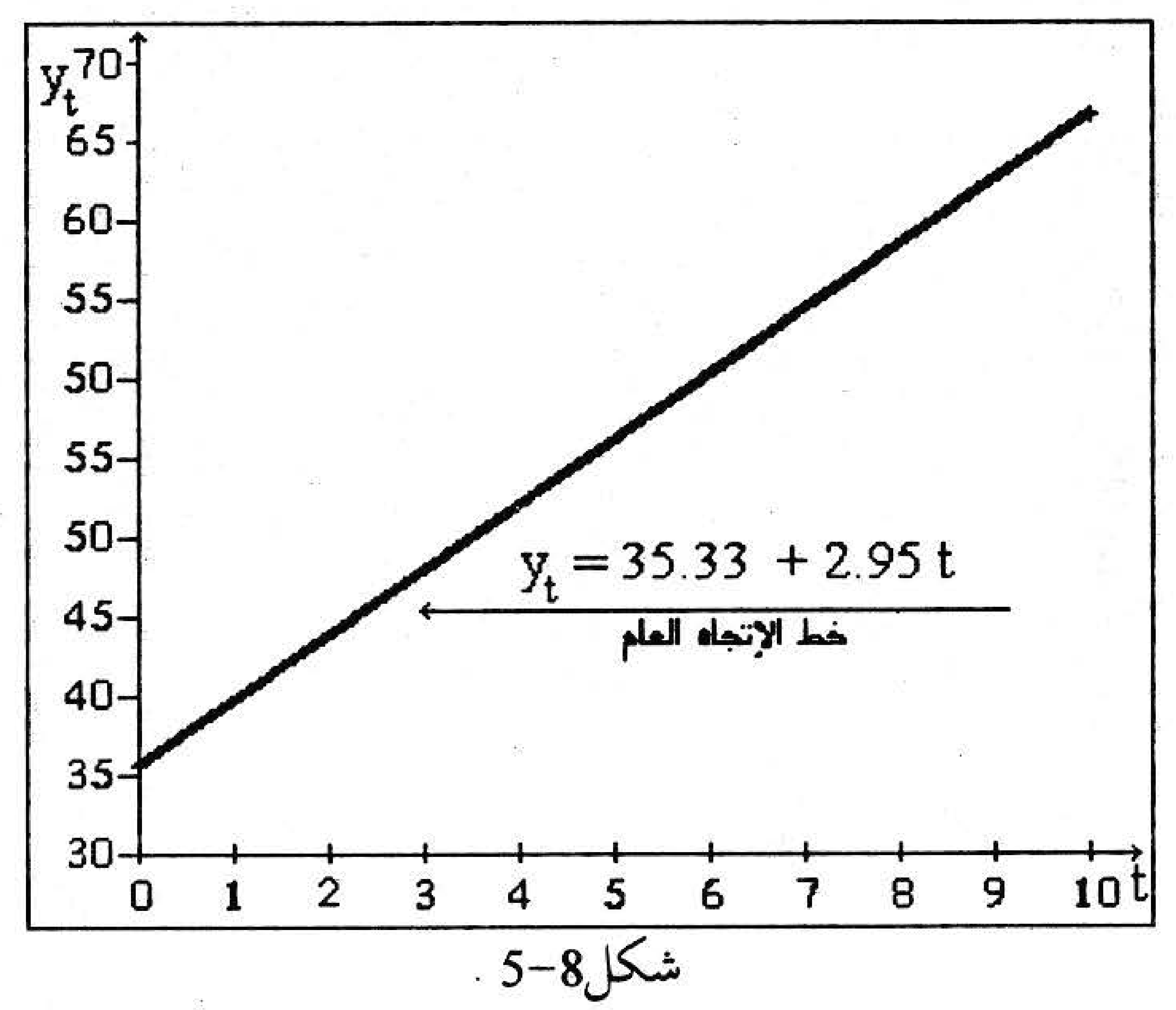
ومنه يكون : $a=35.53$ ، $b=2.95$

وبالتالي تكون معادلة خـــط الاتجـــاه العـــام المقـــدرة بطريقـــة المربعـــات الصغرى كما يلـــي:

$y_t = (35.53 + 2.95t)$ مليون دينار 9-8

ويظهر خط الإتجاه العام المقدر في الشكل 8-5.





شكل8-5 .

يمكن إيجاد نفس القيم الإتجاهية الموجودة في العمود الأخير من الجدول 8-7 .بما يسمى **بالطريقة المختصرة**، و ذلك بجعل السنة الوسيطة هي نقطة الأصل في حالة ما إذا كان N فرديا، وتأخذ السنوات التي تسبقها ترتيبا سالبا و السنوات التي تليها ترتيبا موجبا، وتشكل هذه التراتيب قيم المتغير المستقل، ففي مثالنا السابق، السنة الوسيطة هي سنة 2002 لذلك فهي تشكل نقطة الأصل و فيها يكون$x_0 = 0$ ويكون في السنة التي تليها $x_1=1$ و هكذا بالنسبة للبقية، أما السنوات التي تسبقها فتأخذ إشارات سالبة، و يوضح ذلك الجدول8-8.

السنة	y_t	x_t
1998	35	-4
1999	39	-3
2000	41	-2
2001	46	-1
2002	47	0
2003	50	1
2004	52	2
2005	56	3
2006	60	4
مج	**426**	**0**

جدول8-8



من خلال المعادلتين الطبيعيتين 8-10 و 8-11:

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = b\sum_{t=1}^{n} x_i + Na \qquad 10-8$$

$$\sum_{t=1}^{n} y_t x_t = b\sum_{t=1}^{n} x_t^2 + a\sum_{t=1}^{n} x_t \qquad 11-8$$

نجد :

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = Na \qquad 12-8$$

$$\sum_{t=1}^{n} y_t x_t = b\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \qquad 13-8$$

ذلك لأن :

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = 0$$

و منه يكون :

$$a = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{N} \qquad 14-8$$

و

$$b = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \qquad 15-8$$

بتطبيق ذلك على المثال السابق و بالإستعانة بالجدول التالي :

السنة	y_t	x_t	$y_t x_t$	x^2_t	القيمة الإتجاهية
1998	35	-4	-140	16	35.53
1999	39	-3	-117	9	38.48
2000	41	-2	-82	4	41.43
2001	46	-1	-46	1	44.38
2002	47	0	0	0	47.33
2003	50	1	50	1	50.28
2004	52	2	104	4	53.23
2005	56	3	168	9	56.18
2006	60	4	240	16	59.13
مج	426		177	60	

جدول8-9

نجد : $a = 426/9 = 47.33$ $\qquad b = 177/60 = 2.95$



و بالتالي تكون الدالة الزمنية على النحو :

$$y_t = 47.33 + 2.95\ x_t$$

في العمود الأخير من الجدول 8-9 تظهر لنا القيم الإتجاهية و هي نفس القيم الإتجاهية الواردة في العمود الأخير من الجدول 8-7، ويظهر أن للمعادلتين نفس الميل وهو : b=2.95.

هذا في حالة ما إذا كان N فرديا بحيث تكون السنة الوسيطة سنة وحيدة، أما إذا كان N زوجيا فإنه يتم أخذ المتغير المستقل على أساس نصف سنوي، لإيجاد القيم الإتجاهية، وذلك كما في المثال التالي :

مثال8-6 : البيانات التالية تظهر تطور إنتاج الحبوب في مزرعة ما خلال الفترة 1999- 2006 بآلاف القناطير.

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
الإنتاج	5	7	7	10	13	15	18	20

جدول 8-10

المطلوب : أوجد القيم الإتجاهية للإنتاج بالطريقة المختصرة.

بما أن N زوجي فإنه لاتوجد سنة وسيطة وحيدة، لذلك نأخذ قيم المتغير المستقل على أساس وحدات نصف سنوية، وتكون قيم x كما في الجدول التالي:

السنة	y_t	x_t
1999	5	-7
2000	7	-5
2001	7	-3
2002	10	-1
2003	13	1
2004	15	3
2005	18	5
2006	20	7
مج		**0**

جدول 8-11

بإستخدام الطريقة المختصرة نوجد فقط : y_tx_t و x^2_t وذلك من خلال الجدول 8-12:



السنة	y_t	x_t	$y_t\, x_t$	x^2_t	القيم الإتجاهية
1999	5	-7	-35	49	4.08
2000	7	-5	-35	25	6.31
2001	7	-3	-21	9	8.54
2002	10	-1	-10	1	10.76
2003	13	1	13	1	12.99
2004	15	3	45	9	15.21
2005	18	5	90	25	17.44
2006	20	7	140	49	19.67
مج		0	187	168	

جدول 8-12

بإستخدام المعادلتين 8-14 و 8-15 نجد :

$$a = 11.88$$
$$b = 1.1$$

ومنه تكون المعادلة الزمنية بالطريقة المختصرة هي :

$$y_t = 11.88 + 1.1\, x_t$$

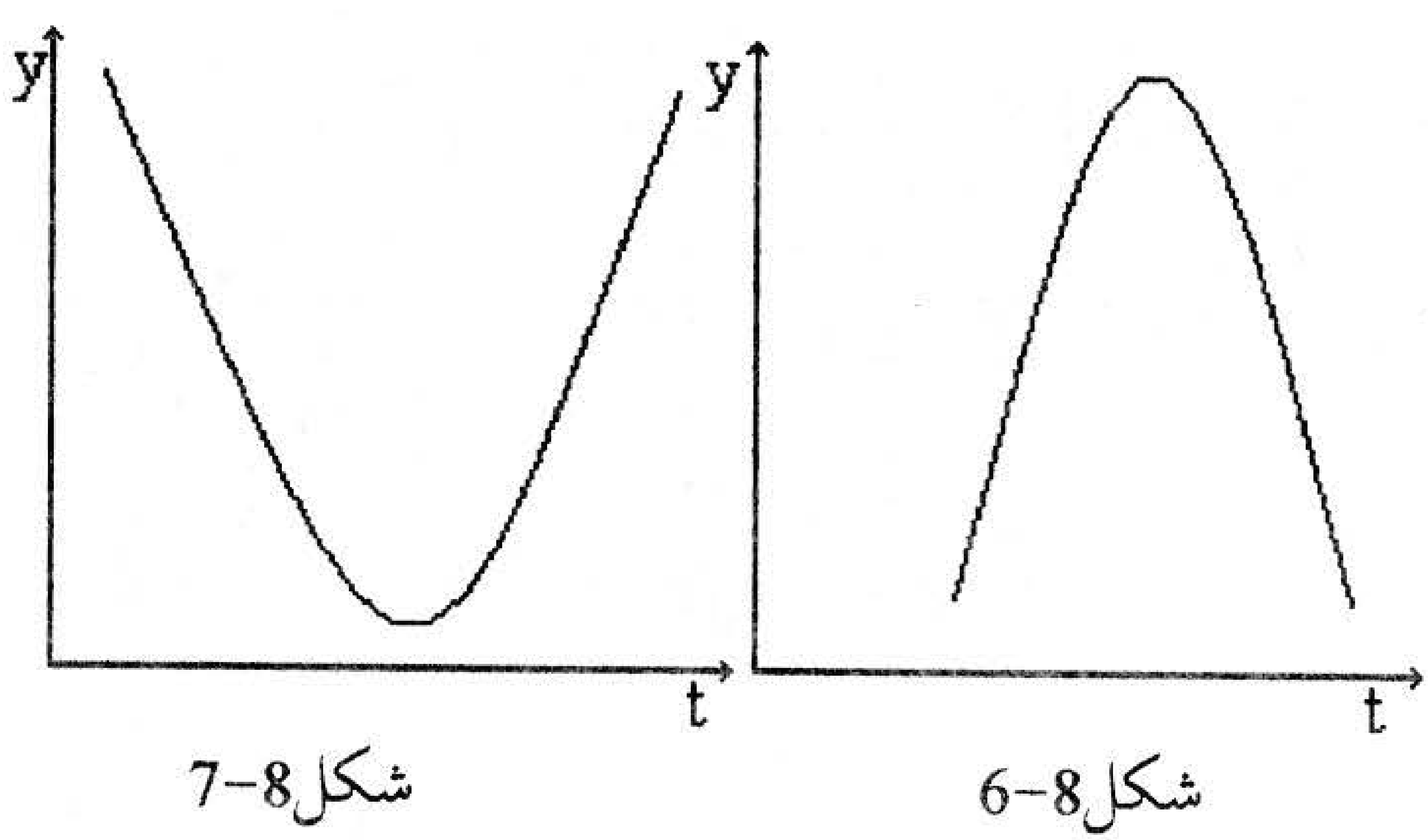
و تظهر القيم الإتجاهية في العمود السادس من الجدول أعلاه، وهي نفس القيم الإتجاهية التي نحصل عليها فيما لو إستخدمنا الطريقة العادية، إذ تكون معادلة الإتجاه العام بهذه الطريقة (الطريقة العادية) على النحو :

$$y_t = 4.08 + 2.23\, t$$

2- **الشكل غير الخطي للإتجاه العام** : يمكن أن يأخذ الإتجاه العام للسلسلة الزمنية شكلا غير خطي، كشكل دالة القطع المكافيء أو شكل الدالة الأسية وغيرها، وسنتناول في هذا البند كيفية تقدير الإتجاه العام للظواهر فيما لو ظهر شكل انتشار قيمها على الزمن بشكل يوحي بأن دالتها الزمنية تكون في صيغة دالة قطع مكافيء أو صيغة دالة أسية.

أ- **صيغة دالة القطع المكافيء** : يأخذ منحنى دالة القطع المكافيء أحد الشكلين التاليين:





شكل8-7 شكل8-6

ونظرا لإستحالة إيجاد الدالة الحقيقية، فإنه يتم تقدير الإتجاه العام لها عن طريق المعادلة التالية:

$$y_t = a + bt + ct^2 \qquad 16-8$$

ويتم تقدير معالم هذه الدالة بإستخدام طريقة المربعات الصغرى، وذلك بتحويلها الى معادلة خطية، بإجراء التحويلات التالية:

$$t=x \;, \quad t^2=z \qquad 17-8$$

و بناء على ذلك تصبح المعادلة الجديدة على النحو :

$$y_t = a + bx_t + cz_t \qquad 18-8$$

وكما هو واضح، فلإن المعادلة المحصل عليها هي معادلة إنحدار ثلاثي، لذلك يتم تقدير معالمها: a، b، c عن طريق المعادلات :8-19،8-20، 8-21 التالية :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \sum_{i=1}^{n} x_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2} \qquad 19-8$$



$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} x_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2} \qquad 20-8$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} - \bar{z}c \qquad 21-8$$

و هـــي نفـــس المعـــادلات :6-34، 6-35، 6-36 المســـتخدمة في الإنحدار الثلاثي في الفصـــل الســـابق.

بعد الحصول علـــى المعـــالم المقـــدرة : **a**، **b**، **c**، يتـــم تحويـــل المعادلـــة المحصل عليها الى أصلـــها كمـــا هـــي واردة في المعادلـــة رقـــم 8-16.

مثـــال:8-7 : البيانـــات التاليـــة تظـــهر تطـــور الـــواردات **الغذائيـــة** خلال الفـــترة 1998-2006، بملايـــير الدينـــارات.

السنة	القيمة
1998	50
1999	100
2000	200
2001	350
2002	400
2003	350
2004	200
2005	100
2006	50

جدول8-13

المطلـــوب : 1- قـــدم هـــذه البيانـــات علـــى معلـــم متعـــامد. مـــاذا تســـتنتج؟

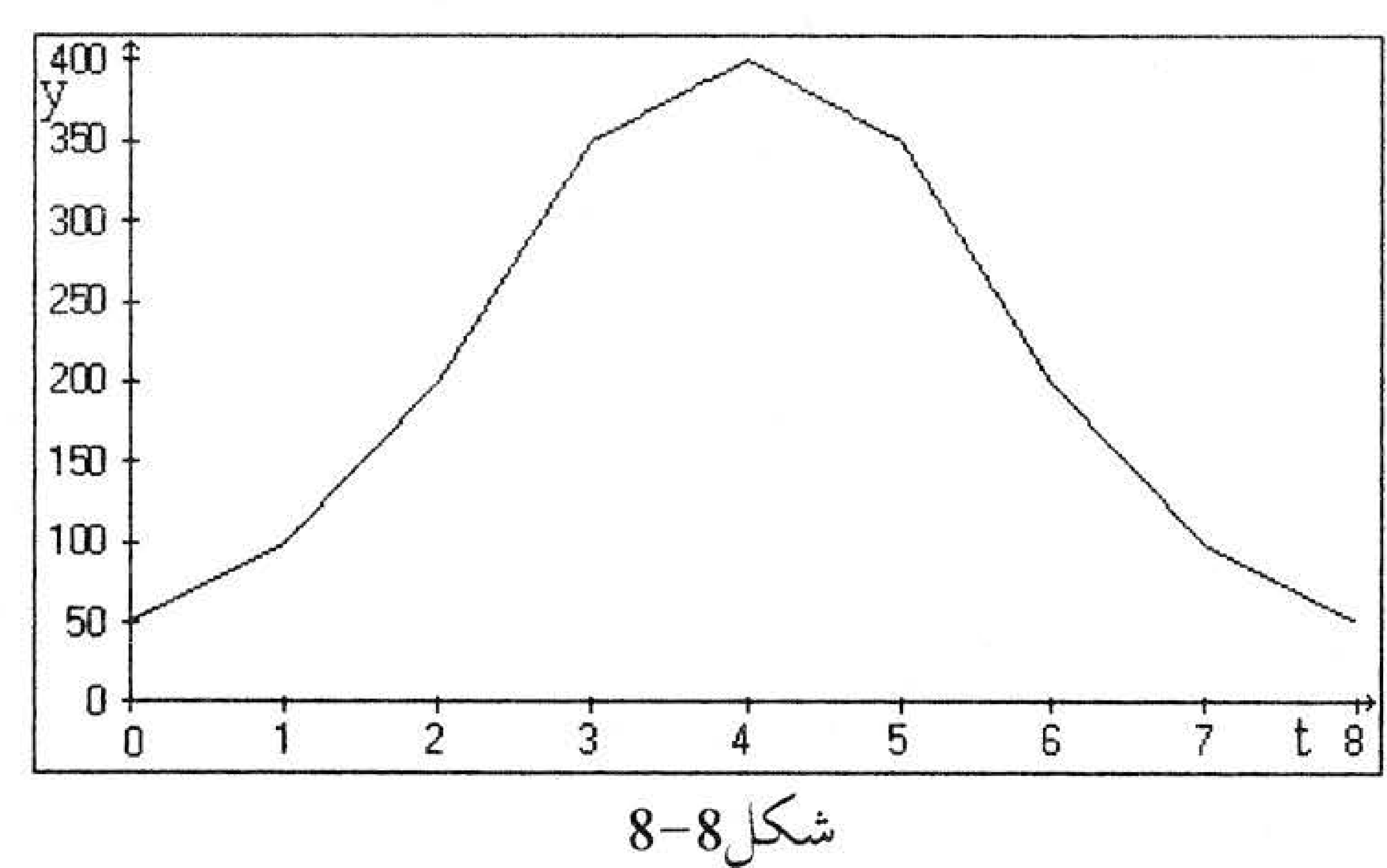
2- إعـــط المعادلـــة العامـــة للشـــكل المحصـــل عليـــه، ثم قدرهـــا.

الإجابة : تقديم البيانات علـــى معلـــم متعـــامد:



تطور الواردات الغذائية خلال الفترة 1998-2006، بملايير الدينارات

t=0 سنة 1998



شكل8-8

يلاحظ أن الشكل المحصل عليه هو شكل دالـــة قطـــع مكـــافيء، وبالتـــالي فإن شكل دالته سوف يكون على نحو الدالـــة رقـــم 8-16، أي:

$$y_t = a + bt + ct^2$$

بإجراء التحويلات اللازمة، لتصبح الدالة خطيـــة يمكـــن تقديرهـــا بطريقـــة المربعات الصغرى، نحصل على معادلة مـــن الشـــكل 8-18 أي :

$$y_t = a + bx_t + cz_t$$

حيث : $x_t=t \ , \ z_t=t^2$

ونجد معالم الدالة بتطبيق المعادلات8-19، 8-20، 8-21 بمساعدة الجدول التالي:

t=x	t^2=z	y_t	y_tx_t	y_tz_t	z_tx_t	x^2_t	z^2_t	القيم الإتجاهية
0	0	50	0	0	0	0	0	1.5
1	1	100	100	100	1	1	1	148.5
2	4	200	400	800	8	4	16	253.8
3	9	350	1050	3150	27	9	81	317.4
4	16	400	1600	6400	64	16	256	339.1
5	25	350	1750	8750	125	25	625	319.2
6	36	200	1200	7200	216	36	1296	257.5
7	49	100	700	4900	343	49	2401	154.0
8	64	50	400	3200	512	64	4096	8.9
36	**204**	**1800**	**7200**	**34500**	**1296**	**204**	**8772**	**مج**

جدول8-14



نجد:

$b=167.89$

$c=-20.87$

$a=1.53$

ومنه تكون معادلة الإنحدار المقدرة على أساس المعادلة رقم 8-18 هي :

$$y_t = 1.53 + 167.89x_t - 20.87z_t$$

بتحويلها الى أصلها كما في المعادلة 8-16 نحصل على دالة القطع المكافيء المقدرة كما هي أدناه :

$$y_t = 1.53 + 167.89t - 20.87t^2$$

تكون القيم الإتجاهية تقريبية كما هي واضحة في العمود الأخير من الجدول8-14.

كما سبقت الإشارة تستخدم هذه الطريقة في إيجاد الإتجاه العام للبيانات التي يعطى شكل إنتشارها شكلا مشابها للقطع المكافيء، وعمليا نصادف الكثير من البيانات من هذا النوع، كتطور واردات دولة ما من الحبوب، فقد نجد أن وارداتها تتزايد مع البداية، و لكن بإتباع سياسة الإعتماد على النفس وإحلال المنتوج المحلي محل الواردات، فإن الواردات تبدأ في التناقص بعد أن تصل مستوى أعظمي معين، وذلك بوتائر سلبية، الشيء الذي يجعل إتجاهها العام يشبه القطع المكافيء.

2- صيغة الدالة الأسية : في بعض الأحيان يتخذ الإتجاه العام للسلسلة الزمنية شكل الدالة الأسية، وذلك خاصة بالنسبة للمتغيرات القابلة للنمو بوتائر ثابتة على إمتداد فترات زمنية معينة، و تكون الصيغة العامة للدالة الأسية على النحو التالي :

$$y_t = a.b^t.\varepsilon_t \qquad 22-8$$

حيث : a، b ثوابت، ε_t: حد الخطأ وهو متغير عشوائي.

ويتم تقديرها عن طريق المعادلة التالية :

$$y_t = a.b^t \qquad 23-8$$

حيث : **a: هي قيمة تقاطع المنحنى بالإحداثي العمودي،b: معامل نمو الدالة.**



و بإستخدام طريقة المربعات الصغرى يتم تقدير معالم هذه الدالة وذلك بعد تحويلها الى دالة خطية بإدخال اللوغاريتم على طرفيها، أي :

$$\text{Log } \mathbf{b}.\text{Log } \mathbf{y_t} = \text{Log } \mathbf{a.b^t} = \text{Log } \mathbf{a} + t \qquad 24-8$$

وبإجراء التحويلات التالية :

$$\text{Log } \mathbf{y_t} = y^*_t$$
$$\text{Log } \mathbf{a} = a^*$$
$$\text{Log } \mathbf{b} = b^*$$

نحصل على الدالة التالية:

$$y^*_t = a^* + b^* t \qquad 25-8$$

بإستخدام طريقة المربعات الصغرى نحصل على المعادلتين التقديريتين التاليتين:

$$b^* = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} (y^*_t - \overline{y}^*)(t - \overline{t})}{\sum_{t=0}^{n-1} (t - \overline{t})} \qquad 26-8$$

$$a^* = \overline{y}^* - b^* \overline{t} \qquad 27-8$$

بعد إيجاد معالم الدالة 8-25 يتم تحويلها الى الأصل حسب المعادلة 8-23.

القيمة **b** كما هي في المعادلة 8-23 عبارة عن نسبة القيمة التقديرية في فترة معينة الى قيمتها في الفترة السابقة لها، أي :

$$b = \frac{y_t}{y_{t-1}} \qquad 28-8$$

y_t تكتب على النحو: $y_t = y_{t-1} + (y_t - y_{t-1})$ أو :

$$y_t = y_{t-1} + \Delta y_{t-1} \qquad 29-8$$

بتعويض 8-29 في المعادلة 8-28 نجد:

$$b = \frac{y_{t-1} + \Delta y_{t-1}}{y_{t-1}} = 1 + \frac{\Delta y_{t-1}}{y_{t-1}} \qquad 30-8$$

معلوم أن الطرف الأخير من المعادلة 8-30 هو القيمة التقديرية لوتيرة النمو (معدل النمو. أنظر البند الثاني من الفصل 9)، ونرمز له بالحرف k، لذلك يمكن أن نكتب b على النحو التالي:

$$b=1+k \quad 31-8$$

و النتيجة هي أن نمو قيمة المتغير التابع بالنسبة للزمن، بموجب الدالة الأسية يكون في شكل متوالية هندسية، و تكون الزيادة النسبية ثابتة، والجدول التالي يظهر ذلك:

t	$y_t = a.b^t$	Y_t/y_{t-1}
0	a	-
1	a.b	b
2	$a.b^2$	b
3	$a.b^3$	b
. . .	. . .	. . .
n-1	$a.b^{n-1}$	b

جدول8-15

من الجدول يظهر إذن أن الرقم القياسي التقديري ثابت على طول الفترة المدروسة و يساوي القيمةb.

تعتبر الدالة الأسية جد هامة في التطبيقات الإقتصادية و الإجتماعية، خاصة بالنسبة للظواهر التي تنمو بمعدلات نمو ثابتة، كتطور السكان وتطور الإنتاج.

مثال 8-8: البيانات التالية تظهر تطور إنتاج النفط في أحد الحقول بآلاف البراميل:

السنة	الإنتاج
2000	4
2001	8
2002	20
2003	40

جدول8-16

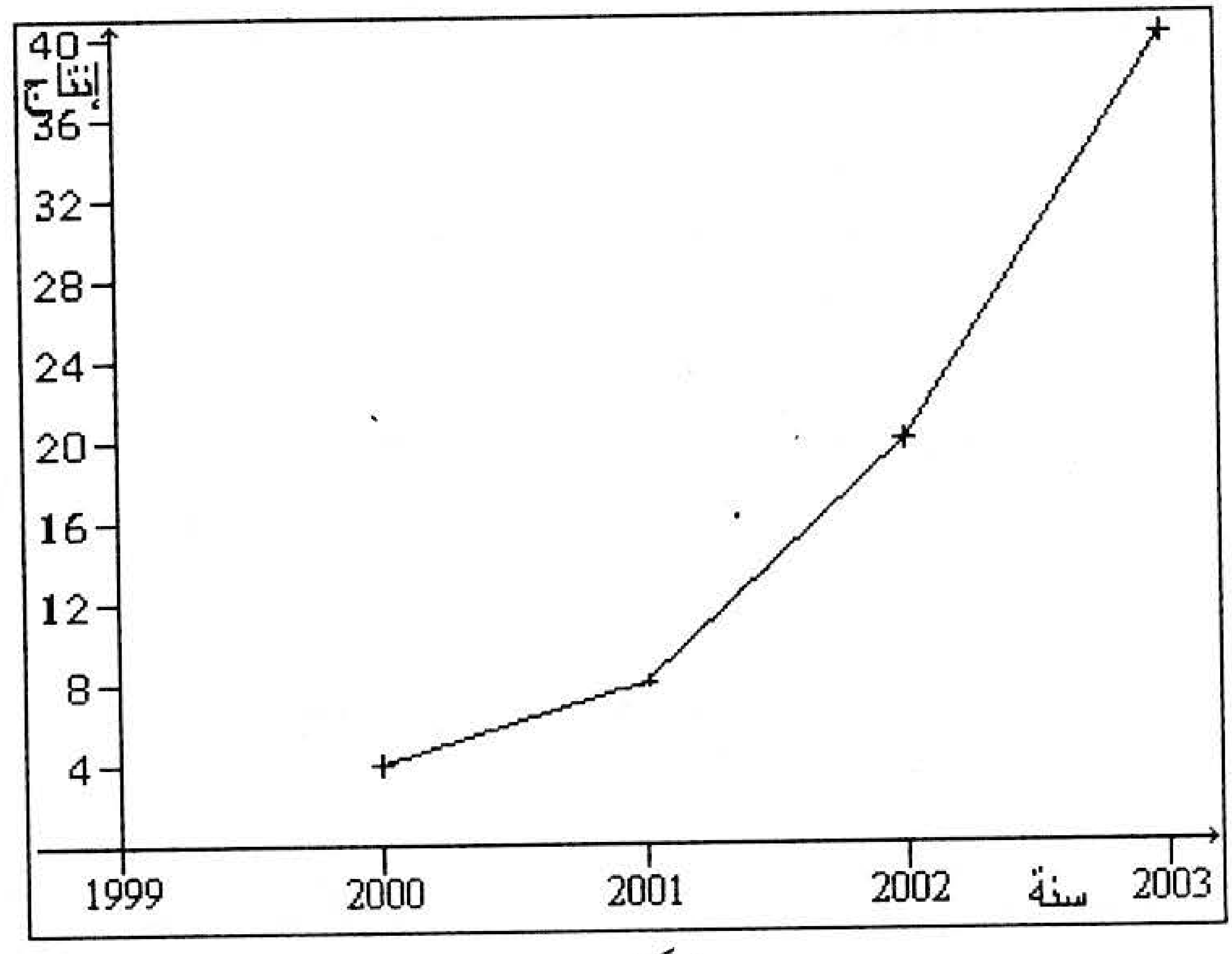


المطلوب : ارسم شكل الإنتشار واستنتج الدالة الزمنية التي يخضع لها تطـــور الإنتاج، ثم قدرها.

الإجابة :

شكل الإنتشار:

تطور إنتاج النفط في أحد الحقول.



شكل8-9

من شكل الإنتشار يظهر بأن الدالة الزمنية لتطور الإنتاج تأخذ شـــكل الدالـــة الأسية كما هي معرفة أعلاه أي :

$$y_t = a.b^t$$

حيث y_t : قيمة الإنتاج في الفترة t

و يتـــم تقديـــر معالمـــها :b و a بتحويلـــها الى شـــكل خطـــي لنتمكـــن مـــن تقديرهـــا باســـتخدام طريقـــة المربعـــات الصغـــرى و ذلـــك كمـــا هو واضح أعلاه، وعليه يتعـــين علينـــا إجـــراء التحويـــلات التاليـــة :



بجعل:

$$\text{Log } y_t = y^*_t$$
$$\text{Log } a = a^*$$
$$\text{Log } b = b^*$$

تكون الدالة الخطية المطلوب تقدير معالمها بطريقة المربعات الصغرى على الشكل:

$$y^*_t = a^* + b^* t$$

بتطبيق المعادلات 8-26 و 8-27 و من خلال الجدول التالي نجد :

السنة	t	y_t	$y^*_t = \text{Log } y_t$	$(y^*_t - \bar{y}^*)(t - \bar{t})$	$(t - \bar{t})^2$
2000	0	4	0.60	0.75	2.25
2001	1	8	0.90	0.10	0.25
2002	2	20	1.30	0.10	0.25
2003	3	40	1.60	0.75	2.25
مج	**6**		**4.40**	**1.70**	**5**

جدول8-17

$$\text{Log } b = b^* = 1.7/5 = 0.34$$
$$\text{Log } a = a^* = 0.59$$

و تكون :

$$b = 10^{0.34} = 2.19$$
$$a = 10^{0.59} = 3.89$$

و بالتالي تكون الدالة الزمنية المقدرة على النحو :

$$y_t = 3.89 \cdot 2.19^t$$

أما القيم الإتجاهية للدالة فهي:

40.89 , 18.66 , 8.52 , 3.89

و هي قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية.



رابعا: تحديد المركبات الموسمية وحذف تغيراتها : كما سبقت الإشارة فإن السلسلة الزمنية تحتوي على تغيرات الإتجاه العام وعلى التغيرات الموسمية والدورية وكذا التغيرات العشوائية، ويكون من المفيد ، تحديد مركبات الموسم، وحذف التغيرات الموسمية، ذلك لأن هدف الباحث هو التعرف على القيمة الحقيقية للظاهرة مستبعدا منها تأثير التقلبات الموسمية، تجنبا لتضليل الإرتفاع أو الإنخفاض المؤقت في قيمة الظاهرة.

ولأجل ذلك هناك عدة طرق نتناول منها الطريقتين التاليتين :

1- طريقة النسبة الى الإتجاه العام : كما هو واضح من إسم هذه الطريقة، فإنه يتم الإعتماد على نسبة القيم الحقيقية الى القيم الإتجاهية المحصل عليها إنطلاقا من إحدى طرق تحديد خط الإتجاه العام وذلك بإتباع الخطوات التالية:

ا- تحديد خط الإتجاه العام.

ب- إيجاد النسبة المائوية بقسمة كل قيمة حقيقية على القيمة الإتجاهية المقدرة المقابلة.

ج-إيجاد حاصل قسمة مجموع النسب المحصل عليها من الخطوة ب على عدد السنوات، فنحصل بذلك على معدلات تسمى بالمعاملات الموسمية أوالمركبات الموسمية.

د- نقسم كل قيمة حقيقية على المعامل الموسمي المقابل لها و نضربه في 100 فنحصل على قيم الظاهرة محذوفة التغيرات الموسمية.

مثال8- 9: أوجد القيم المحذوفة التغيرات الموسمية للبيانات التالية بطريقة النسبة الى الإتجاه العام.

شهر/سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1992	4	5	6	7	6	7	8	3	6	6	5	6
1993	6	7	8	6	9	10	9	4	8	11	12	14
1994	10	12	13	15	15	15	16	9	14	15	16	17

جدول8-18



الجواب:

نلاحظ أن القيم الموسمية في هذا المثال عبارة عن قيم شهرية.

ا- نوجد خط الإتجاه العام بإستخدام طريقة المربعات الصغرى إنطلاقا من القيم الشهرية حسب ترتيبها بمساعدة الجدول 8-19، حيث نجد الدالة الخطية للإتجاه العام كما يلي :

$$y_t = 3.22 + 0.34t$$

حيث t ترتيب الشهر (3 , 2 , 1 =36.t ...).

و تظهر القيم الإتجاهية في العمود الخامس من الجدول 8-19.

t	y_t	$(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})$	$(t-\bar{t})^2$	قيم الإتجاه	t	y_t	$(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})$	$(t-\bar{t})^2$	قيم الإتجاه
1	4	59.28	306.25	3.56	19	9	-0.22	0.25	9.61
2	5	73.33	272.25	3.89	20	4	-8.17	2.25	9.95
3	6	53.39	240.25	4.23	21	8	-3.61	6.25	10.29
4	7	35.44	210.25	4.57	22	11	5.44	12.25	10.62
5	6	46.50	182.25	4.90	23	12	11.50	20.25	10.96
6	7	30.56	156.25	5.24	24	14	25.06	30.25	11.29
7	8	16.61	132.25	5.58	25	10	3.61	42.25	11.63
8	3	67.67	110.25	5.91	26	12	19.17	56.25	11.97
9	6	32.72	90.25	6.25	27	13	30.22	72.25	12.30
10	6	29.28	72.25	6.58	28	15	52.78	90.25	12.64
11	5	33.33	56.25	6.92	29	15	58.33	110.25	12.98
12	6	22.39	42.25	7.26	30	15	63.89	132.25	13.31
13	6	18.34	30.25	7.59	31	16	81.94	156.25	13.65
14	7	11.00	20.25	7.93	32	9	-6.00	182.25	13.99
15	8	5.06	12.25	8.27	33	14	66.06	210.25	14.32
16	6	8.61	6.25	8.60	34	15	86.11	240.25	14.66
17	9	0.67	2.25	8.94	35	16	108.17	272.25	15.00
18	10	-0.28	0.25	9.28	36	17	132.22	306.25	15.33
					666	**340**	**137.00**	**3885.00**	

جدول8-19

ب- تحديد المعاملات الفصلية (الشهرية): يتم ذلك على مرحلتين :

- نقسم القيم الحقيقية على القيم الإتجاهية ونحولها الى نسبة مائوية كما هي واضحة في الجدول الموالي:



t	y_t	قيم الإتجاه $\mathbf{y}_t$	$(y_t/\mathbf{y}_t).100$
1	4	3.56	112.36
2	5	3.89	128.53
3	6	4.23	141.84
4	7	4.57	153.17
5	6	4.90	122.45
6	7	5.24	133.59
7	8	5.58	143.37
8	3	5.91	50.76
9	6	6.25	96.00
10	6	6.58	91.19
11	5	6.92	72.25
12	6	7.26	82.64
13	6	7.59	79.50
14	7	7.93	88.27
15	8	8.27	96.74
16	6	8.60	69.77
17	9	8.94	100.67
18	10	9.28	107.76
19	9	9.61	93.65
20	4	9.95	40.20
21	8	10.29	77.75
22	11	10.62	103.58
23	12	10.96	109.49
24	14	11.29	124.00
25	10	11.63	85.98
26	12	11.97	100.25
27	13	12.30	105.69
28	15	12.64	118.67
29	15	12.98	115.56
30	15	13.31	112.70
31	16	13.65	117.22
32	9	13.99	64.33
33	14	14.32	97.77
34	15	14.66	102.32
35	16	15.00	106.67
36	17	15.33	110.89
666	**340**		مج

جدول8-20

القيم$(y_t/\mathbf{y}_t).100$ تعني القيم الحقيقية مقسومة على القيم الإتجاهية، مأخوذة كنسبة مائوية.

– نعيد ترتيب القيم ثم نوجد وسطها الحسابي كما هو واضح في العمود الأخير من الجدول 8-21، حيث نحصل على ما يسمى بالمعاملات الموسمية (الشهرية).

شهر / سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1992	112.3	128.5	141.8	153.2	122.5	133.6	143.4	50.8	96.0	91.2	72.2	82.4
1993	79.5	88.3	96.7	69.8	100.7	107.8	93.7	40.2	77.8	103.6	109.5	124.0
1994	86.0	100.3	105.7	118.7	115.6	112.7	117.2	64.3	97.8	102.3	106.7	110.9
معامل شهري	**92.6**	**105.7**	**114.7**	**113.9**	**112.9**	**118.0**	**118.1**	**51.8**	**90.5**	**99.0**	**96.1**	**105.8**

جدول8-21

في شهر أفريل مثلا يسجل إرتفاع شهري مقداره 13.9 %، بينما في شهر أكتوبر يسجل إنخفاض شهري مقداره 1 %.



ج- نحذف التغيرات الشهرية من البيانات الأولية بقسمة البيانات الحقيقية لكل شهر على المعامل الشهري وذلك ما يظهر في العمود الرابع من الجدول 8-22.

t	y_t	معاملات شهرية	قيم منزوعة التغيرات الشهرية
1	4	92.6	4.3
2	5	105.7	4.7
3	6	114.7	5.2
4	7	113.9	6.1
5	6	112.9	5.3
6	7	118.0	5.9
7	8	118.1	6.8
8	3	51.8	5.8
9	6	90.5	6.6
10	6	99.0	6.1
11	5	96.1	5.2
12	6	105.8	5.7
13	6	92.6	6.5
14	7	105.7	6.6
15	8	114.7	7.0
16	6	113.9	5.3
17	9	112.9	8.0
18	10	118.0	8.5
19	9	118.1	7.6
20	4	51.8	7.7
21	8	90.5	8.8
22	11	99.0	11.1
23	12	96.1	12.5
24	14	105.8	13.2
25	10	92.6	10.8
26	12	105.7	11.4
27	13	114.7	11.3
28	15	113.9	13.2
29	15	112.9	13.3
30	15	118.0	12.2
31	16	118.1	13.6
32	9	51.8	17.4
33	14	90.5	15.5
34	15	99.0	15.2
35	16	96.1	16.6
36	17	105.8	16.1

جدول8-22

بإعادة ترتيب القيم نحصل في النهاية على البيانات منزوعة التغيرات الشهرية وهي كما في الجدول 8-23.

شهر / سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1992	4.3	4.7	5.2	6.1	5.3	5.9	6.8	5.8	6.6	6.1	5.2	5.7
1993	6.5	6.6	7.0	5.3	8.0	8.5	7.6	7.7	8.8	11.1	12.5	13.2
1994	10.8	11.4	11.3	13.2	13.3	12.7	13.5	17.4	15.5	15.2	16.6	16.1

جدول8-23

2-طريقة متوسطات الموسم : لتحديد مركبات الموسم وحذف تغيراته بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:



ا- نوجد متوسطات كل موسم بتقسيم مجموع قيم كل موسم على عدد السنوات.

ب-نوجد المتوسط الموسمي العام، بتقسيم مجموع متوسطات المواسم على عدد المواسم.

ج-نوجد النسب الموسمية بقسمة متوسط كل موسم على المتوسط العام وضربه في المقدار 100 (نسبة مائوية).

د-نستبعد الإتجاه العام للظاهرة قبل حساب النسب الموسمية، وذلك بإيجاد معادلة الإتجاه العام للقيم (إعتمادا على المتوسطات السنوية)، و نحسب عن طريقها القيم الإتجاهية للظاهرة، ثم نقسم كل قيمة واقعية على القيمة الإتجاهية المقابلة لها و نضربها في 100(نسبة مائوية)، فنحصل بذلك على نسب تدل على الظاهرة مستبعدا منها الإتجاه العام.

ج- نحذف التغيرات الموسمية بقسمة القيم الحقيقية على المعاملات الموسمية (الشهرية).

مثال8-10: البيانات التالية خاصة بتطور أسعار الحبوب خلال الفترة 1999-2006 بالدينار للطن الواحد.المطلوب إيجاد القيم المحذوفة التغيرات الموسمية بطريقة متوسطات الموسم.

شهر سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	معدل سنوي
1999	218	181	178	150	131	116	123	145	169	202	225	247	**173.8**
2000	242	209	199	168	149	136	142	162	188	221	242	264	**193.5**
2001	267	228	220	187	169	151	159	184	209	245	267	294	**215.0**
2002	292	249	242	211	190	173	182	205	228	264	289	317	**236.8**
2003	320	278	270	234	214	196	205	230	256	296	342	352	**266.1**
2004	353	312	298	262	241	222	125	259	292	327	354	383	**285.7**
2005	397	340	329	293	270	247	257	288	315	357	391	416	**325.0**
2006	429	377	363	323	298	280	289	319	348	393	426	460	**358.8**
مج	**2518**	**2174**	**2099**	**1828**	**1662**	**1521**	**1482**	**1792**	**2005**	**230 5**	**2536**	**2733**	
وسط	**314.8**	**271.8**	**262.4**	**228.5**	**207.8**	**190.1**	**185.3**	**224**	**250.6**	**288.1**	**317**	**341.6**	

جدول8-24

نوجد متوسط القيم الشهرية بقسمة مجموعها على 8 (عدد السنوات).

نوجد المتوسط الشهري العام بقسمة مجموع المتوسطات الشهرية على 12(عدد الأشهر)، أي: $(314.8+271.8+....+341.6)/12 \ =256.8$

نوجد النسب الموسمية (الشهرية) بقسمة المتوسط الشهري على المتوسط الشهري العام وضربه في 100 للحصول على نسب مائوية، كما هي واضحة في الجدول أدناه:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
متوسط شهري	314.8	271.8	262.4	228.	207.8	190.	185.3	224	250.6	288.1	317	341.6
نسبة شهرية	122.6	105.8	102.2	89.0	80.9	74.0	72.2	87.2	97.6	112.2	123.4	133
تغير شهري	22.6	5.8	2.2	-11	-19.1	-26	-27.8	-12.8	-2.4	12.2	23.4	33

جدول8-25

في شهر جانفي مثلا سجل صعود موسمي يقدر بـ: 22.6 % ، بينما في شهر أفريل سجل هبوط موسمي يقدر بـ: 11%.

إذا ظهر وأن قيم الظاهرة متأثرة بإتجاه عام معين فإنه يتعين إستبعاد هذا الإتجاه قبل حساب النسب الموسمية، لأنه إذا لم تستبعد فإن التغيرات الموسمية لا تكون دقيقة، فإذا كان الإتجاه العام صعوديا مثلا، و كان التغير الموسمي صعوديا أيضا، فإن النسب الموسمية تكون أكثر مما يجب أن تكون و العكس صحيح.

لإستبعاد الإتجاه العام، نوجد معادلة الإتجاه العام للقيم الموجودة لدينا وذلك من خلال المتوسط السنوي، ونحسب القيم الإتجاهية للظاهرة، ثم نقسم كل قيمة واقعية على القيمة الإتجاهية المقابلة مأخوذة كنسبة مائوية، فنحصل على نسب تدل على الظاهرة مستبعدا منها الإتجاه العام.

بما أن عدد السنوات زوجي، و عدد الأشهر كذلك، فإن الطريقة المختصرة، تجعلنا نأخذ المتغير المستقل على أساس نصف سنوي، لإيجاد القيم الإتجاهية، ويتم ذلك عن طريق الحسابات كما هي واردة في الجداول الموالية.

و تكون معادلة الإتجاه العام على النحو:



$$y_t = a + bx_t \qquad 32-8$$

حيث : y_t هي المتوسطات السنوية، يتم الحصول عليها بقسمة المجموع السنوي على 12 (انظر السطر الأخير من الجدول8-24).

ويتم تقدير كل من : a و b بالطريقة المختصرة و ذلك بالإستعانة بالمعـــادلتين الطبيعيتين رقم 8-10 و 8-11، أي :

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = b\sum_{t=1}^{n} x_i + Na$$

$$\sum_{t=1}^{n} y_t x_t = b\sum_{t=1}^{n} x_t^2 + a\sum_{t=1}^{n} x_t$$

و بالإستعانة بالجدول التالي يتم إيجاد a و b (مع افتراض أن سنة الأســـاس أي السنة الأولى 1999 يكون عندها t=1).

t	y_t	x_t	$y_t x_t$	x_t^2
1	173.8	-7	-1216.6	49
2	193.5	-5	-967.5	25
3	215.0	-3	-645.0	9
4	236.8	-1	-236.8	1
5	266.1	1	266.1	1
6	285.7	3	857.1	9
7	325.0	5	1625.0	25
8	358.8	7	2511.6	49
مج	**2054.7**	**0**	**2193.9**	**168**

جدول8-26

بما أن:0= Σx_t لذلك فالقيم التقديرية لكل من: a و b تكون على النحو التالي:

$$b = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \qquad a = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{N}$$

ومن خلال الجدول 8-26 نجد :

$$a = \frac{2054.7}{8} = 256.84$$

$$b = \frac{2193.9}{168} = 13.06$$



و بالتالي تكون معادلة الإتجاه العام كما يلي :

$$y_t = 256.84 + 13.06x_t$$

بما أن x_t تمثل وحدات نصف سنوية إبتداء من السنة الوسيطة (نقطة الأصـل) 1 جانفي 2003، فإن معامل الإتجاه العام الشهري هو :

$$\frac{a}{6} = \frac{13.06}{6} = 2.2$$

و بالتالي تحسب القيم الإتجاهية للأشهر إعتمادا على المعادلة التالية :

$$z_t = 2.2\, m + 256.84 \qquad 33-8$$

حيث m هو ترتيب القيم الشهرية المأخوذة في منتصف كل شهر والموضحة في الجدول التالي :

شهر / سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1999	-47.5	-46.5	-45.5	-44.5	-43.5	-42.5	-41.5	-40.5	-39.5	-38.5	-37.5	-36.5
2000	-35.5	-34.5	-33.5	-32.5	-31.5	-30.5	-29.5	-28.5	-27.5	-26.5	-25.5	-24.5
2001	-23.5	-22.5	-21.5	-20.5	-19.5	-18.5	-17.5	-16.5	-15.5	-14.5	-13.5	-12.5
2002	-11.5	-10.5	-9.5	-8.5	-7.5	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5
2003	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
2004	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
2005	24.5	25.5	26.5	27.5	28.5	29.5	30.5	31.5	32.5	33.5	34.5	35.5
2006	36.5	37.5	38.5	39.5	40.5	41.5	42.5	43.5	44.5	45.5	46.5	47.5

جدول8-27

و بناء على ذلك تكون القيم الإتجاهية لجميع الأشـهر والسـنوات كمـا في الجدول 8-28 أدناه، وتم الحصول عليها بتعويض القيم كما هي في الجـدول 8-27 أعلاه، على وجه الترتيب في المعادلة 8-33.

شهر / سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1999	152.3	154.5	156.7	158.9	161.1	163.3	165.5	167.7	169.9	172.1	174.3	176.5
2000	178.7	180.9	183.1	185.3	187.5	189.7	191.9	194.1	196.3	198.5	200.7	202.9
2001	205.1	207.3	209.5	211.7	213.9	216.1	218.3	220.5	222.7	224.9	227.1	229.3
2002	231.5	233.7	235.9	238.1	240.3	242.5	244.7	246.9	249.1	251.3	253.5	255.7
2003	257.9	260.1	262.3	264.5	266.7	268.9	271.1	273.3	275.5	277.7	279.9	282.1
2004	284.3	286.5	288.7	290.9	293.1	295.3	297.5	299.7	301.9	304.1	306.3	308.5
2005	310.7	312.9	315.1	317.3	319.5	321.7	323.9	326.1	328.3	330.5	332.7	334.9
2006	337.1	339.3	341.5	343.7	345.9	348.1	350.3	352.5	354.7	356.9	359.1	361.3

جدول8-28



للحصول على المعدلات الموسمية (الشهرية)، نقسم القيم الشهرية الأصلية على القيم الإتجاهية و نضربها في 100، فنحصل على الجدول 8-29 :

شهر / سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1999	143.1	117.2	113.6	94.4	81.3	71.0	74.3	86.5	99.5	117.1	129.1	139.9
2000	135.4	115.5	108.7	90.7	79.5	71.7	74.0	83.5	95.8	111.3	120.6	130.1
2001	130.2	110.0	105.0	88.3	79.0	69.9	72.8	83.4	93.8	108.9	117.6	128.2
2002	126.1	106.5	102.6	88.6	79.1	71.3	74.4	83.0	91.5	105.0	114.0	124.0
2003	124.1	106.9	102.9	88.5	80.2	72.9	75.6	84.2	92.9	106.6	122.2	124.8
2004	124.2	108.9	103.2	90.1	82.2	75.2	42.0	86.4	96.7	107.5	115.6	124.1
2005	127.8	108.7	104.4	92.3	84.5	76.8	79.3	88.3	95.9	108.0	117.5	124.2
2006	127.3	111.1	106.3	94.0	86.2	80.4	82.5	90.5	98.1	110.1	118.6	127.3
معدل موسمي	**129.8**	**110.6**	**105.8**	**90.9**	**81.5**	73.7	**71.9**	**85.7**	**95.5**	**109.3**	**119.4**	**127.8**

جدول8-29

السطر الأخير من الجدول أعلاه يمثل المعدلات الموسمية (الشهرية)، وتم إيجادها بقسمة مجموع النسب الشهرية على 8 (عدد السنوات).

إذا كان مجموع المعدلات الموسمية لايساوي : 1200، فإنه يتم تصحيحها وذلك بضرب المعدل الموسمي (الشهري) في 1200 وقسمته على مجموع المعدلات الشهرية المحصل عليها سابقا، فنجد بذلك المعدلات الموسمية المصححة.

واضح أن النتائج المتوصل اليها تحدد لنا تأثير تقلبات كل موسم على قيمة الظاهرة، وبالتالي نتمكن من الإستعداد لمواجهة الزيادة أو النقصان في الظاهرة.

يتم حذف التغيرات الشهرية بقسمة القيم الحقيقية على المعدلات الموسمية وتحويلها الى نسبة مائوية كما جرى في المثال السابق.



تمارين

تمرين1: لأي عنصر من عناصر السلاسل الزمنية يمكن إرجـــاع الحـــوادث التالية:

1- زيادة الطلب على أجهزة الإعلام الآلي منذ سنة 2000.

2- الحاجة الى زيادة إنتاج الحبوب نتيجة للإزدياد في عدد السكان.

3- ظهور فترة من الرخاء الإقتصادي.

4- حدوث اضراب عام في أحد المصانع الكبرى.

5- زيادة إستهلاك الغاز و الكهرباء خلال شهري جانفي وفيفري.

تمرين 2: البيانات التالية تظهر تطور كميات تساقط الأمطار خلال الفترة : 86-1995 في إحدى الولايات :

السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الكمية	95	80	85	90	95	110	115	100	115	120

المطلوب:

1- أوجد معامل الخشونة. ماذا تستنتج؟.

2- عن طريق المعدل المتحرك بطول 3 أوجد سلسلة جديدة. ثم أوجد معـــامل خشونتها وقارنه بمعامل الخشونة المطلوب في السؤال1.

3- بطريقة المتوسطات الجزئية أجب على نفس أسئلة المطلوب 2.

4- على معلم متعامد ارسم البيانات الأصلية و البيانات المطلوبة في السـؤال 2. ماذا تستنتج؟.

تمرين3: البيانات التالية تظهر تطور المواليد و الوفيات في الجزائر خلال الفـترة 1990-2002 بآلاف الأشخاص، حسب مصادر الديوان الوطني للإحصائيات.

(المصدر /www.ons)

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
مواليد	775	773	799	775	776	711	654	654	607	594	589	619	617
وفيات	151	155	160	168	180	180	172	178	144	141	140	141	138

المطلوب:

1- أوجد معامل الخشونة لكل من المواليد و الوفيات. ماذا تستنتج؟

2- أوجد الإتجاه العام لكل من المواليد و الوفيات بطريقة المعدلات المتحركة ثم بطريقة المعدلات النصفية.

3- أوجد الإتجاه العام لكل من المواليد و الوفيات بطريقة المربعات الصغرى.

4- أوجد الزيادة الطبيعية للسكان عند كل سنة ثم أوجد اتجاهها العام بـالطرق المطلوبة في الأسئلة السابقة.

تمرين4: البيانات التالية تظهر تطور كل من الإنتاج الداخلي الإجمالي والواردات، خلال الفترة 76-1987 للجمهورية الجزائرية حسب أرقام الديوان الوطني للإحصائيات، بملايير الدينارات.

السنة	الواردات	إنتاج د.إ
1976	28.43	68.50
1977	37.27	81.90
1978	41.99	104.00
1979	46.47	128.50
1980	55.84	162.50
1981	65.99	191.50

السنة	الواردات	إنتاج د.إ
1982	68.32	207.60
1983	66.72	239.80
1984	68.16	259.90
1985	65.06	289.20
1986	55.79	286.50
1987	48.88	307.90

المطلوب : 1- قدم كل من الواردات و الإنتاج الداخلي الإجمالي بدلالة الزمن على محور متعامد. قارن بين المنحنيين. ماذا تستنتج؟. 2- ارسم المنحنيين المطلوبين في السؤال1، بإعادة البيانات عن طريق معدل متحرك بطول 3 ثم بطول 4. ماذا تستنتج. 3-أوجد الدالة الزمنية للواردات و الدالة الزمنية للإنتاج الداخلي الإجمالي. 4- أوجد القيم الإتجاهية لكل من الواردات والإنتاج الداخلي الإجمالي (بدلالة الزمن) بطريقتين.

تمرين5: البيانات التالية تظهر تطور سكان الجزائر خلال الفترة 1962- 2003 بالملايين، حسب معطيات الديوان الوطني للإحصائيات:



السنة	1962	1963	1964	1965	1966	1967
عدد السكان	10.24	10.67	11.13	11.60	12.14	12.57
السنة	1968	1969	1970	1971	1972	1973
عدد السكان	12.95	13.35	13.75	14.18	14.16	15.07
السنة	1974	1975	1976	1977	1978	1979
عدد السكان	15.53	16.02	16.3	17.1	17.7	18.1
السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985
عدد السكان	18.7	19.2	19.9	20.5	21.2	21.9
السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991
عدد السكان	22.5	23.2	23.8	24.4	25.0	25.6
السنة	1992	1993	1994	1995	1996	1997
عدد السكان	26.3	26.9	27.4	28.0	28.6	29.0
السنة	1998	1999	2000	2001	2002	2003
عدد السكان	29.5	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6

المطلوب :1- أوجد النموذج الزمني المقدر لتطور السكان.

2- ماهو عدد السكان المتوقع لسنوات: 2010 و 2020 و 2030.

تمرين6: البيانات التالية خاصة بتطور إنتاج الأحذية في إحدى الورشات بآلاف الأزواج.**المطلوب**:أوجد النموذج الزمني المقدرللإنتاج.

السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
الإنتاج	20	30	35	40	42	35	28	18	10

تمرين7: البيانات التالية خاصة بتطور إنتاج الحبوب في إحدى المساحات المستصلحة بعشرات القناطير:

السنة	1988	1989	1990	1991	1992	1993
الإنتاج	5	10	30	60	140	220

المطلوب : أوجد الدالة الزمنية المقدرة للإنتاج، وأوجد القيم الإتجاهية وقارنها بالقيم الحقيقية.



تمرين8 : البيانات التالية تظهر الأمطار الشهرية لسنة 1992 لبعض الولايات الكبرى حسب معطيات د.و.للإحصائيات.

شهر / مدن	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
وهران	310	180	848	134	859	237	16	9	–	264	359	178
الشلف	608	191	709	311	335	286	102	–	–	436	190	185
الجزائر	1548	410	1009	807	609	190	77	–	153	684	1397	706
سطيف	344	348	324	665	732	197	378	15	698	161	351	837
قسنطينة	528	332	495	345	973	107	173	103	206	229	1161	1928
عنابة	690	805	651	115	831	149	108	6	22	364	1262	1432

المطلوب: بإستخدام طريقة النسبة الى الإتجاه العام ، أوجدالقيم المحذوفة التغيرات الشهرية.

تمرين9: البيانات التالية تظهر تطور أسعار الغاز في أشهر السنة خلال الفترة 1998-2005.

شهر/سنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1998	218	181	178	150	131	116	123	145	169	202	225	247
1999	242	209	199	168	149	136	142	162	188	221	242	264
2000	267	228	220	187	169	151	159	184	209	245	267	294
2001	292	249	242	211	109	173	182	205	228	264	289	317
2002	320	278	270	234	214	196	205	230	256	296	342	352
2003	353	312	298	262	241	222	125	259	292	327	354	383
2004	387	340	329	293	270	247	257	288	315	357	391	416
2005	429	377	363	329	298	280	289	319	348	393	426	460

المطلوب: بإستخدام طريقتي النسبة الى الإتجاه العام و المتوسطات الموسمية ، أوجد مركبات كل شهر و استبعد التغيرات الشهرية.

الفصل التاسع
الأرقـــام الـقـيـاسـيـة.

الظواهر الإقتصادية والإجتماعية تتغير من فترة لأخرى، ومن مكان لآخر، بقيم يكون ليس من السهل إدراك أهميتها عن طريق الأرقام المطلقة، وليس من السهل أيضا مقارنتها مع غيرها، فعندما نقول مثلا أن صادرات المحروقات لدولة ما إرتفعت من 35 مليار دينار سنة 1986 الى 50 مليار دينار سنة 1994، فإن قيمة التغير و هي 15 مليار دينار، لاتعطينا صورة واضحة عن أهمية هذا التطور، كما لاتعطينا أيضا صورة واضحة مقارنة بظاهرة أخرى، تغيرت خلال نفس الفترة بنفس القيمة، لذلك كان لابد من اللجوء الى التحليل النسبي للظواهر الكمية، ويتم ذلك إما عن طريق الأرقام القياسية أو عن طريق معدلات النمو عامة، و ذلك ما سنتطرق اليه في هذا الفصل.

أولا: الأرقام القياسية:

تعريف9-1: الرقم القياسي هو أداة لقياس التغير النسبي الحاصل في قيم أية ظاهرة أو مجموعة من الظواهر، من ظرف أول يسمى **بظرف الأساس** الى ظرف آخر يسمى **بظرف المقارنة**، سواء كان الظرف زمانيا أو مكانيا. وتكون قيمة الرقم القياسي في ظرف الأساس مساوية دائما المقدار100.

والأرقام القياسية كثيرة الإستخدام في دراسة تطور الظواهر الإقتصادية والإجتماعية، كالإنتاج، الإستهلاك، الصادرات، الواردات... الخ، غير أنها أكثر إستخداما في دراسة تطور الأسعار والنفقات الإستهلاكية، لذلك سوف نجعل كل التعاريف والقوانين الموالية منطبقة عليها.

هناك ثلاثة أصناف من الطرق لإيجاد الأرقام القياسية هي :

1- **الأرقام القياسية البسيطة**.2- **الأرقام القياسية المرجحة**. 3- **الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك.**

1-الأرقام القياسية البسيطة : تضم مجموعة من الطرق هي: طريقة المناسيب البسيطة، طريقة الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة، طريقة الوسط



الهندسي للمناسيب البسيطة و الطريقة التجميعية المرجحة، و سنتطرق لكل واحدة فيما يلي:

أ- طريقة المناسيب البسيطة :

تعريف9-2: اذا كان سعر مادة ما في الفترة 0 (**فترة الأساس**) هو :P_0، وأصبح سعرها في الفترة 1 (**فترة المقارنة**): P_1، فإن الرقم القياسي بطريقة المناسيب البسيطة يعرف كما يلي:

$$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \qquad 1-9$$

يعني هذا أنه إذا كان سعر المادة 100 وحدة نقدية بأسعار فترة الأساس، فإنه يصبح يساوي I بأسعار فترة المقارنة.

مثال9-1: إذا كان سعر الكيلوغرام الواحد من السكر سنة : 2002 هو : 35 دينار، وأصبح سعره سنة : 2003 40 دينار، أوجد الرقم القياسي لتطور سعر السكر بطريقة المناسيب البسيطة.

الجواب:

$$I = \frac{P_{2003}}{P_{2002}} \times 100 = \frac{40}{35} \times 100 = 114.28\ \% \qquad 2-9$$

يعني هذا أنه إذا كان سعر السكر يساوي 100 دينار بأسعار سنة 2002، فإنه ارتفع ليصبح 114.28 دينار بأسعار سنة 2003.

تستخدم هذه الطريقة، في دراسة تطور قيمة ظاهرة واحدة فقط، غير أنه عمليا، وفي الكثير من الأحيان يتطلب الأمر، دراسة تطور أسعار عدة مواد، وفي مثل هذه الحالة غالبا ما يتم استخدام الوسط الحسابي أو الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة.

ب- طريقة الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة:

تعريف9-3: إذا كانت لدينا : $P_{0,1}\ ,\ P_{0,2}\ ,\ P_{0,3}\ \ldots\ P_{0,n}$ ، أسعار **فترة الأساس** للمواد : 1، 2، 3 . . . N على التوالي، و : $P_{1,1}\ ,\ P_{1,2}\ ,$



$P_{1,3}$ .... $P_{1,n}$، أسعار **فترة المقارنة** لنفس المواد، حيث N : عدد المـــواد، فإن الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة يعرف بالمعادلة التالية:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_{1,i}}{P_{0,i}}\right]}{N} \qquad 3-9$$

ج-طريقة الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة:

تعريف9-4:اذاكانت لدينا: $P_{0,1}$, $P_{0,2}$, $P_{0,3}$ .... $P_{0,n}$

هي أسعار سنة الأساس للمواد : 1، 2، 3 . . . N على التوالي

و $P_{1,1}$, $P_{1,2}$, $P_{1,3}$ .... $P_{1,n}$

هي أسعار سنة المقارنة لنفس المواد، حيث N هو عدد المواد، فـــإن الوســـط الهندسي للمناسيب البسيطة يعرف، بأنه الجذر النوني لجداءات قيم المناســـيب البسيطة، أي :

$$I = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{P_{1,i}}{P_{0,i}}\right]} \times 100 \qquad 4-9$$

مثال9-2: البيانات التالية تظهر تطور أسعار مجموعة من المواد الإستهلاكية بين سنتي : 1992 و 1993، بالدينارات.

المطلوب :أوجد الرقم القياسي بطريقتي الوسط الحسابي والوسط الهندســـي للمناسيب البسيطة.

المادة/السعر	P_{1992}	P_{1993}
الخبز (كلغ)	1.5	2.5
الحليب (ل)	3.0	4.0
الزيت(5ل)	140.0	150.0
القهوة (كلغ)	30.0	34.0
السكر (كلغ)	10.0	15.0
الطماطم (كلغ)	25.0	50.0
الصابون (قطعة)	10.0	12.5

جدول9-1



الإجابة: لإيجاد الوسط الحسابي و الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة، يتطلب الأمر أولا ايجاد المناسيب البسيطة باستخدام المعادلة رقم 9-1، ثم تطبيق المعادلتين، 9-3 و 9-4 على التوالي، وذلك بمساعدة الجدول التالي:

$\frac{P_{1,i}}{P_{0,i}} \times 100$	P1,i	P0,i	المادة/السعر	i
166.67	2.5	1.5	الخبز (كلغ)	1
133.33	4.0	3.0	الحليب (ل)	2
107.14	150.0	140.0	الزيت(5ل)	3
113.33	34.0	30.0	القهوة (كلغ)	4
150.00	15.0	10.0	السكر (كلغ)	5
200.00	50.0	25.0	الطماطم (كلغ)	6
125.00	12.5	10.0	الصابون (قطعة)	7
995.47	**268**	**219.5**		مج

جدول9-2

• **الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة** : بتطبيق المعادلة 9-3 نجد :

$$I = \frac{995.47}{7} \times 100 = 142.21 \ \%$$

يعني هذا أنه إذا كانت تكاليف شراء تشكيلة المواد المشار اليها في الجدول هي 100 دينار بأسعار سنة 1992، فإن نفس تشكيلة المواد أصبحت تكلف 142.21 دينار بأسعار سنة 1993.

•**الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة**: بتطبيق المعادلة 9-4 نجد :

$$I = \sqrt[7]{10.118} \times 100 = 139.18 \ \%$$

مدلول ذلك أنه إذا كانت تكاليف شراء تشكيلة المواد المشار اليها في الجدول هي 100 دينار بأسعار سنة 1992، فإن نفس تشكيلة المواد أصبحت تكلف 139.18 دينار بأسعار سنة 1993.

د-الطريقة التجميعية البسيطة : تعرف كما يلي :

تعريف9-4: إذا كانت لدينا : $P_{0,1}$ ، $P_{0,2}$ ، $P_{0,3}$ .... $P_{0,n}$ أسعار فترة الأساس للمواد : 1، 2، 3 . . . N على التوالي

و $P_{1,1}$ ، $P_{1,2}$ ، $P_{1,3}$ .... $P_{1,n}$

هي أسعار فترة المقارنة لنفس المواد، حيث N : عدد المواد، فإن الرقم القياسي بالطريقة التجميعية البسيطة، يعطى كما يلي:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i}} \times 100 \qquad 5-9$$

مثال9-3 : أوجدالرقم القياسي بالطريقة التجميعيةالبسيطة لبيانات المثال9-2. بتطبيق المعادلة رقم 9-5 نجد:

$$I = \frac{268}{219.5} \times 100 = 122\ \%$$

بتعميق النظر في مجاميع الأسعار في جدول المثال 9-2 وفي أسعار كل مادة على حدة، نجد أن أسعار كل من الزيت و البن تهيمن على مجموع الأسعار، بينما أسعار بقية المواد لاتشكل سوى جزءا ضئيلا من مجموع الأسعار، و نتيجة لهذا فإن الرقم القياسي المحصل عليه بهذه الطريقة يتأثر تأثيرا كبيرا بالمواد المرتفعة الثمن، وفي الواقع العملي وحسب النظرية الإقتصادية الجزئية، فإن المواد المرتفعة الثمن، هي أقل طلبا وأقل أهمية بالنسبة للمستهلك، لذلك فإن هذه الطريقة (الأرقام القياسية البسيطة)، معيبة، وهي أقل استخداما، ويكون من الضروري ادخال الكميات المستهلكة من كل سلعة كأوزان أي ترجيح الأسعار بالكميات، لإيجاد رقم قياسي أفضل، يعتمد على مجموع النفقات على السلع الاستهلاكية، وليس على الأسعار وحدها، وهذا ما نستعرضه في الصنف الثاني من الأرقام القياسية.

2-الأرقام القياسية المرجحة: في هذه الطرق يتم أخذ الكميات المستهلكة من كل مادة كأوزان، بحيث ننتقل من الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار الى الرقم القياسي التجميعي للنفقات على المواد، وذلك لتفادي عيب الطرق السابقة، بحيث يتم حصر المواد المستهلكة وأسعارها والكميات



المستهلكة من كل مادة، لعائلة استهلاكية، أو لمجتمع استهلاكي يتكون من عدد محدد من الأفراد، و يتم استخدام إحدى الطرق التالية:

أ- الطريقة التجميعية المرجحة:

تعريف9-5: إذا كانت لدينا : $P_{0,1}$, $P_{0,2}$, $P_{0,3}$ .... $P_{0,n}$

أسعار فترة الأساس للمواد : 1، 2، 3 . . . N على التوالي

و $P_{1,1}$, $P_{1,2}$, $P_{1,3}$ .... $P_{1,n}$

هي أسعار فترة المقارنة لنفس المواد، وأن الكميات المستهلكة من كل مادة في الفترتين هي : Q_1 , Q_2 , Q_3 ... Q_n على التوالي، حيث N : عدد المواد، فإن الرقم القياسي بالطريقة التجميعية المرجحة يعطى كما يلي:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i}Q_i}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i}Q_i} \times 100 \qquad 6-9$$

مثال9-4: الجدول التالي يظهر تطور أسعار مجموعة من المواد بالدينار، وكذا الكميات المستهلكة منها، لعائلة تتكون من6 أفراد.المطلوب ايجاد الرقم القياسي بالطريقةالتجميعيةالمرجحة.

i	المادة/السعر	P0,i	P1,i	Q_i
1	الخبز (كلغ)	1.5	2.5	20
2	الحليب (ل)	3.0	4.0	30
3	الزيت(5ل)	140.0	150.0	1
4	القهوة (كلغ)	30.0	34.0	1
5	السكر (كلغ)	10.0	15.0	4
6	الطماطم (كلغ)	25.0	50.0	2
7	الصابون (قطعة)	10.0	12.5	4

جدول9-3

حيث : Q_i : الكميات المستهلكة من المادة i .



الإجابة: لإيجاد الرقم القياسي المطلوب، نوجد مجموع أسعار سنة الأساس مضروبة في الكميات، ومجموع أسعار سنة المقارنة مضروبة في الكميات، كما هو واضح في الجدول 9-4 أدناه .

i	المادة/السعر	P0,i	P1,i	Q_i	P0,i.Qi	P1,i.Qi
1	الخبز (كلغ)	1.5	2.5	20	30	50
2	الحليب (ل)	3.0	4.0	30	90	120
3	الزيت(5ل)	140.0	150.0	1	140	150
4	القهوة (كلغ)	30.0	34.0	1	30	34
5	السكر (كلغ)	10.0	15.0	4	40	60
6	الطماطم (كلغ)	25.0	50.0	2	50	100
7	الصابون (قطعة)	10.0	12.5	4	40	50
					420	**564**

جدول9-4

بتطبيق المعادلة 9-6 نجد :

$$I = \frac{564}{420} \times 100 = 134.29\ \%$$

يعني هذا أنه إذا كانت نفقات إستهلاك تشكيلة المواد المشار اليها هي 100 دينار بأسعار سنة 1992، فإن نفس تشكيلة المواد أصبحت تكلف حوالي 134 دينار بأسعار سنة 1993.

لو قارنا نتائج الطريقة التجميعية البسيطة، مع نتائج الطريقة التجميعية المرجحة، لوجدنا أن هناك فرق ناتج عن ترجيح الأثمان بالكميات المستهلكة في الفترتين.

إن هذه الطريقة تفترض ثبات الكميات المستهلكة في الفترتين، أي أن المستهلك يبقى يستهلك نفس الكميات مهما تغيرت الأسعار، غير أن واقع سلوك المستهلك غير ذلك، فالكميات التي يستهلكها في سنة الأساس عندما تكون الأسعار عند مستوى معين، هي غير الكميات التي يستهلكها من كل مادة عندما تتغير الأسعار في فترة لاحقة، لذلك فهناك طرق أخرى تأخذ ذلك بالحسبان، لأجل إيجاد أنسب رقم قياسي.



ب- طريقة لاسبير (Laspeyres): وفيها يتم إستخدام كميات فترة الأساس كأوزان، وتعطى بالمعادلة التالية:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i} \times Q_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} \times Q_{0,i}} \times 100 \qquad 7-9$$

حيث : $P_{1,i}$: سعر فترة المقارنة للمادة i. $P_{0,i}$: سعر فترة الأساس للمادة i.

$Q_{0,i}$: الكميات المستهلكة من المادة i في فترة الأساس.

ج- طريقة باش (Paasche): وفيها يتم استخدام كميات فترة المقارنة كأوزان، وتعطى بالمعادلة التالية :

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i} \times Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} \times Q_{1,i}} \times 100 \qquad 8-9$$

حيث :$Q_{1,i}$: كميات فترة المقارنة للمادة i .

د- طريقة فيشر (Fisher) : وهي تقوم على أساس الجمع بين طريقتي لاسبير وباش، اذ يتم ايجاد الرقم القياسي عن طريق الوسط الهندسي لرقمي لاسبير وباش، حيث يتم الحصول على رقم تتوفر فيه جميع الصفات المطلوبة في الرقم القياسي الصحيح، لذلك يسمى هذا الرقم بالرقم القياسي الأمثل، ويعطى عن طريق المعادلة التالية:



$$I=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{1,i}\times Q_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n}P_{0,i}\times Q_{0,i}}\times\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{1,i}\times Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n}P_{0,i}\times Q_{1,i}}}\times 100 \quad 9-9$$

مثال 9-5: من بيانات الجدول التالي، أوجد الأرقام القياسية التالية:

1- رقم باش. 2-رقم لاسبيرس. 3- الرقم الأمثل.

i	المادة/السعر	$P_{0,i}$	$P_{1,i}$	$Q_{0.i}$	$Q_{1.i}$
1	الخبز (كلغ)	1.5	2.5	20	18
2	الحليب (ل)	3.0	4.0	30	25
3	الزيت(5ل)	140.0	150.0	1	0.8
4	القهوة (كلغ)	30.0	34.0	1	1
5	السكر (كلغ)	10.0	15.0	4	3.5
6	الطماطم (كلغ)	25.0	50.0	2	1.5
7	الصابون (قطعة)	10.0	12.5	4	4
مج		**219.5**	**268**		

جدول9-5

حيث: $P_{0,i}$: سعر سنة الأساس للمادة i. $Q_{0,i}$:كمية سنة الأساس للمادة i.

$P_{1,i}$: سعر سنة المقارنة للمادة. $Q_{1,i}$: كمية سنة المقارنة للمادة i.

لإيجاد الأرقام القياسية المطلوبة نستخدم المعادلات أعلاه و بمساعدة الجدول:

مادة/سعر	$P_{0,i}$	$P_{1,i}$	$Q_{0,i}$	$Q_{1,i}$	$P_{0,i}Q_{0,i}$	$P_{1,i}Q_{1,i}$	$P_{1,i}Q_{0,i}$	$Q_{1,i}P_{0,i}$
خبز	1.5	2.5	20	18	30	45	50	27
حليب	3.0	4.0	30	25	90	100	120	75
زيت	140	150.0	1	0.8	140	120	150	112
قهوة	30.0	34.0	1	1	30	34	34	30
سكر	10.0	15.0	4	3.5	40	52.5	60	35
طماطم	25.0	50.0	2	1.5	50	75	100	37.5
صابون	10.0	12.5	4	4	40	50	50	40
					420	**476.5**	**564**	**356.5**

جدول9-6



نجد:

* **رقم لاسبيرس** : باستخدام المعادلة رقم 9-7 نجد :

$$I=(564/420).100=134.29$$

* **رقم باش:** باستخدام المعادلة رقم 9-8 نجد:

$$I=(476.5/356.5).100=133.66$$

* **رقم فيشر** : بإستخدام المعادلة رقم 9-9 نجد:

$$I=\sqrt{134.29\times 133.66}=133.97$$

و تفسر هذه الأرقام بنفس التفاسير السابقة .

3- الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك: إذا كانت المدة بين فترة المقارنة وفترة الأساس طويلة، فإن الرقم القياسي قد لايعبر تعبيرا صحيحا عن تطور الظاهرة، لذلك فإنه يلجأ أحيانا الى إستخدام أساس متحرك على طول سلسلة البيانات، بحيث نوجد الرقم القياسي لكل فترة بالنسبة للفترة السابقة لها بطريقة الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة، و ذلك كما يلي :

$$\boxed{I_{t+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_{t+1,i}}{P_{t,i}}\times\frac{1}{N}} \qquad 10-9$$

حيث : $P_{t+1,i}$: سعر المقارنة في الفترة : t+1، للمادة i.

$p_{t,i}$: سعر الأساس في الفترة t السابقة للفترة t+1، للمادة i.

وعند الحصول على جميع الأرقام القياسية بهذه الطريقة (معادلة9-10)، نضربها في بعضها البعض، ونضرب النتيجة في 100 فنحصل بذلك على رقم قياسي يعكس تطور الظاهرة بين فترة المقارنة وهي آخر فترة ضمن سلسلة البيانات وفترة الأساس وهي أول فترة ضمن سلسلة البيانات، ويسمى الرقم المحصل عليه بالرقم القياسي ذي الأساس المتحرك.

مثال9-6: البيانات التاية تظهر تطور أسعار 3 مواد أساسية خلال الفترة 1989-1994 بالدينارات، المطلوب إيجاد الرقم القياسي للتطور بين سنتي 1989 و1994 بإستخدام طريقة المعدلات المتحركة.

سنة\سلعة	1989	1990	1991	1992	1993	1994
أ	10	12	12	15	20	30
ب	15	15	20	20	21	21
ج	30	30	30	30	32	32

جدول9-7

بتطبيق المعادلة رقم 9-10 نجد المعدلات المتحركة التالية:

1990بالنسبة لـ:1989 $$(\frac{12}{10}+\frac{15}{15}+\frac{30}{30})\times\frac{1}{3}=1.07$$

1991بالنسبة لـ:1990 $$(\frac{12}{12}+\frac{20}{15}+\frac{30}{30})\times\frac{1}{3}=1.11$$

1992بالنسبة لـ:1991 $$(\frac{15}{12}+\frac{20}{20}+\frac{30}{30})\times\frac{1}{3}=1.08$$

1993بالنسبة لـ:1992 $$(\frac{20}{15}+\frac{21}{20}+\frac{32}{30})\times\frac{1}{3}=1.15$$

1994بالنسبة لـ:1993 $$(\frac{30}{20}+\frac{21}{21}+\frac{32}{32})\times\frac{1}{3}=1.17$$

وعليه يكون الرقم القياسي لأسعار سنة 1994 بالنسبة لسنة 1989 بطريقة الأساس المتحرك هو :

$$I=(1.07\times1.11\times1.08\times1.15\times1.17)100=172.59$$

هذه هي أهم أنواع الأرقام القياسية المستخدمة في الحياة العملية، و كما رأينا فمهما كان نوعها تبقى مقياسا نسبيا لتطور الظواهر تتأثر كثيرا بطبيعة فترة الأساس و بمدى موضوعية الباحث الإحصائي في البحث عن أرقام قياسية تعكس بأكبر قدر ممكن طبيعة تطور هذه الظواهر.

4-إختيار فترة الأساس : من المشكلات التي يصادفها الإحصائي عند إعداد الأرقام القياسية هي مشكلة إختيار سنة الأساس، والإحصائي الماهر هو الذي يجيد ذلك، بحيث يجب أن يحرص على أن تكون فترة الأساس فترة عادية خالية من حالات الشذوذ، أو الحالات الطارئة، وذلك لتعكس بحق طبيعة تطور الظاهرة، وإذا حدث وأن

تعذر إيجاد مثل هذه الفترة، فإنه لابد من إجتناب إتخاذ فترة واحدة كأساس، وذلك، إما بجعل متوسط قيم مجموعة من الفترات كأساس، أو إستخدام طريقة المعدلات المتحركة.

5-خصائص الأرقام القياسية الموضوعية : حتى يكون الرقم القياسي في أحسن صيغة تجعله أكثر موضوعية يجب أن يتصف بمجموعة من الخصائص منها ما يلي:

أ- خاصية المطابقة : إذا كانت قيمة الفترة 0 (الأساس) تساوي قيمة الفترة 1 (المقارنة) فإن الرقم القياسي للفترة 1 بالنسبة للفترة 0 يساوي الرقم القياسي للفترة 0 بالنسبة للفترة 1 ويساوي 100 % .

ب-خاصية الجداء : جذر جداء الرقم القياسي للفترة 1 بالنسبة للفترة 0 و الرقم القياسي للفترة 0 بالنسبة للفترة 1 يساوي الى : 100 % . أي أن حاصل جذر جداء الرقمين القياسين المتبادلين يساوي 100 % أو 1 إذا كانا غير مضروبين في 100.

مثال9-7: أثبت الخاصية ب حسابيا إنطلاقا من بيانات المثال 9-1.

الجواب :الرقم القياسي البسيط لسنة 2003 يالنسبة لسنة 2002 هو :

$$I_1=(40/35).100=114.29$$

الرقم القياسي البسيط لسنة 2002 بالنسبة لسنة 2003 هو :

$$I_2=(35/40).100=87.5$$

$$\sqrt{I_1 \times I_2} = \sqrt{114.29 \times 87.5} = 100 \ \%$$

فالخاصية إذن صحيحة.

ج- خاصية التعدي : إذا كانت لدينا الفترات 0، 1، 2 فإن الرقم القياسي للفترة 2 بالنسبة للفترة 0 يساوي جداء الرقم القياسي للفترة 2 بالنسبة للفترة 1 في الرقم القياسي للفترة 1 بالنسبة للفترة 0، أي :

$$I_{2/0}=I_{2/1} \cdot I_{1/0} \qquad 11-9$$

مثال9-9: إذا كانت لدينا أسعار مادة ما خلال 3 فترات هي :

الفترة 0 : 10 الفترة 1 : 15 الفترة 2 : 20

تأكد من صحة الخاصية ج .

الجواب: بتطبيق المعادلة 9- 11 نجد:

$$I_{2/0} = (20/15).(15/10) = 20/10 = 200\ \%$$

و هي نفس القيمة المحصل عليها فيما لو استخدمنا الطريقة المباشرة، و بالتالي فإن الخاصية صحيحة.

د- خاصية التجانس: وهي تعني أن الرقم القياسي قيمة نسبية مستقلة عن وحدات القياس.

هـ- خاصية الإنعكاس في الأساس: الرقم القياسي للفترة1 بالنسبة للفترة 0 يساوي مقلوب الرقم القياسي للفترة 0 بالنسبة للفترة 1، إذا كانا مأخوذين كنسبة واحدية وليس مائوية، أي :

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{I_2}} \qquad 12-9$$

تستخدم هذه الخاصية لإختبار الإنعكاس في الأساس للرقم القياسي.

مثال9-8: أثبت الخاصية هـ انطلاقا من بيانات المثال 9-1.

الرقم القياسي البسيط لسنة 2003 يالنسبة لسنة 2002 هو :

$I_1 = (40/35) = 1.1429$ أي : $I_1 = 114.29\ \%$

الرقم القياسي البسيط لسنة 2002 بالنسبة لسنة 2003 هو :

$I_2 = (35/40) = 0.875$ أي : $I_2 = 87.5\ \%$

و منه نجد أن :

$I_1 = \frac{1}{I_2} = \frac{1}{0.66} = 1.5$ أي : $I_1 = 114.29\ \%$

و هي نفس القيمة المحصل عليها أعلاه، و بالتالي الخاصية صحيحة.

و- خاصية الإنعكاس في العامل: تعني هذه الخاصية أن الرقم القياسي للأسعار مضروبا في الرقم القياسي للكميات يساوي الرقم القياسي للقيمة. تستعمل هذه الخاصية فيما يسمى بإختبار الإنعكاس في العامل، ولايوجد سوى

رقم واحد فقط يحقق هذه الخاصية وهو الرقم القياسي الأمثل، ويمكن إثبات ذلك كما يلي :

الرقم القياسي الأمثل للأسعار (مرجحا بالكميات) هو :

$$I_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i} \times Q_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} \times Q_{0,i}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i} \times Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} \times Q_{1,i}}}$$

الرقم القياسي الأمثل للكميات (مرجحا بالأسعار) هو :

$$I_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{1,i} \times P_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0,i} \times P_{0,i}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{1,i} \times P_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0,i} \times P_{1,i}}}$$

ومنه يكون الجداء : $I_q . I_p$ يساوي الرقم القياسي للقيم أي :

$$I_q \times I_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1,i} . Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} . Q_{0,i}}$$

ينبغي ضرب النتيجة في 100 لتكون نسبة مائوية.

إن أفضل رقم قياسي هو ذلك الذي يحقق مجمل هذه الخصائص، ويقتصر الكثير من الإحصائيين على أن الرقم القياسي الأفضل هو الذي يحقق خاصية **الإنعكاس في الأساس** وخاصية **الإنعكاس في العامل**، وذلك ما يطلق عليه عادة **إختبار الأرقام القياسية**.

ثانيا. معدلات النمو: معدل نمو ظاهرة ما هو النسبة المائوية لتغيرها من فترة لأخرى ، و يمكن إيجاد هذا المعدل إما عن طريق معدل النمو البسيط أو معدل النمو السنوي المتوسط.



1- معدل النمو البسيط

تعريف9-5: إذا كانت قيمة ظاهرة ما في فترة الأساس هي X_0، وأصبحت في فترة المقارنة X_1، فإن معدل نمو هذه الظاهرة خلال الفترة يعطى كما يلي :

$$T = \frac{X_1 - X_0}{X_0} \times 100 \qquad 13-9$$

و يمكن كتابة العبارة 9-13 على النحو:

$$T = \frac{X_1}{X_0} \times 100 - 100 \qquad 14-9$$

أو:

$$T = (\frac{X_1}{X_0} - 1) \times 100$$

معلوم أن الطرف الأيمن من المعادلة 9-14، هو الرقم القياسي بطريقة المناسيب البسيطة كما هو معرف في المعادلة 9-1، لذلك يمكن كتابة معدل النمو كذلك كما يلي:

$$T=I-100 \qquad 15-9$$

أي الرقم القياسي منقوصا منه 100.

يمكن إيجاد معدل النمو إعتمادا على أي من طرق الأرقام القياسية، وذلك بطرح المقدار 100 من الرقم القياسي، فنجد بذلك معدل النمو بإستخدام الطريقة التجميعية البسيطة أو معدل النموعن طريق الوسط الحسابي أو الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة ...الخ.

2-معدل النمو السنوي المتوسط

تعريف9-6: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات، واخترنا منها : X_1 قيمة سنة المقارنة و X_0 قيمة سنة الأساس، فان معدل النمو السنوي المتوسط بين الفترتين 0 و 1 لهذه البيانات يعطى كما يلي:

$$T = \frac{\text{Log } X_1 - \text{Log } X_0}{N.\text{Log } e} \times 100 \qquad 16-9$$

حيث N : عدد السنوات. e: أساس اللوغاريتم النبييري أي : e=2.718، Log e=0.43429

و يمكن استخدام العبارة التالية أيضا لإيجاد معدل النمو السنوي المتوسط :

$$T = \left[\left[\frac{X_1}{X_0} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \times 100 \qquad 17-9$$

مثال9-9: البيانات التالية تظهر تطور إنتاج الحبوب في إحدى المزارع .

السنة	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الكمية	95	80	110	115	100	115	120

جدول9-9

المطلوب : أوجد معدل النمو السنوي المتوسط للإنتاج.

الإجابة : $X_0=95 \quad , \quad X_1=120$

$$T = \frac{Log120 - Log95}{7Log\ \mathbf{e}} \times 100 = 3.34\ \%$$

ويعني هذا أن معدل النمو السنوي المتوسط للإنتاج بين سـنتي 1989 و1995 هو 3.34% .



تمارين

تمرين1: ما هي الإحتياطات النظرية التي يجب على الإحصائي الإلمـــام بهـــا لإعداد أرقام قياسية موضوعية؟

تمرين2: البيانات التالية تظهر تطور عدد سكان الجزائر خـــلال السـنوات 1980-2003 بالملايين حسب معطيات الديوان الوطني للإحصائيات:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985
عدد السكان	18.7	19.2	19.9	20.5	21.2	21.9
السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991
عدد السكان	22.5	23.2	23.8	24.4	25.0	25.6
السنة	1992	1993	1994	1995	1996	1997
عدد السكان	26.3	26.9	27.4	28.0	28.6	29.0
السنة	1998	1999	2000	2001	2002	2003
عدد السكان	29.5	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6

المطلوب :

1- أوجد الأرقام القياسية البسيطة لتطور السكان واشرحها وذلك بإعتماد:

أ- السنة السابقة كسنة أساس.

ب- سنة 1980 سنة أساس

ج- سنة 1990 سنة أساس

د- سنة 2000 سنة أساس.

2- أوجد معدل النمو للحالات أ ، ب ، ج، د

3-أوجد معدل النمو السنوي المتوسط لتطور السكان.

تمرين3: البيانات التالية تظهر تطور أسعار سلة من المواد الغذائية في الجزائر خلال الفترة 1998 -2000 بالدينار.



المصدر. الجزائر بالأرقام. العدد 31. الديوان الوطني للإحصائيات www.ons.dz

المادة	1998	1999	2000
حليب (ل)	20	20	20
زبدة (كلغ)	292.45	320.42	332.52
زيت المائد (5ل)	395.85	357.12	339.63
فاصوليا (كلغ)	67.08	79.38	81.39
بطاطس (كلغ)	26.92	26.37	22.05
بصل (كلغ)	21.21	26.05	29.52
طماطم (كلغ)	36.24	33.48	33.20
برتقال (كلغ)	53.30	56.20	62.18
تمر معلب	127.37	125.88	114.88
سكر قطع (كلغ)	58.17	59.14	59.69
سكر مبلور (كلغ)	40.33	36.90	37.38
خبز (250غ)	8.39	8.39	8.37
دقيق (50كلغ)	1555.88	1555.88	1558.38
كسكس (500غ)	34.71	35.00	35.00
عجائن غذائية(كلغ)	70.00	73.12	73.33
لحم بقر ب ع(كلغ)	594.21	631.87	636.92
لحم خروف (كلغ)	483.84	498.95	466.40
لحم دجاج (كلغ)	158.22	150.87	152.04

المطلوب:

1-أوجد الرقم القياسي البسيط لكل مادة مرة باعتماد سنة 1998 كسنة أساس و مرة أخرى باعتماد سنة 1999 كسنة أساس. علق على النتيجة في كل حالة.

2- أوجد الرقم القياسي بطريقة الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة عند كل سنة، علق على النتيجة.

3- اوجد الرقم القياسي بطريقة الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة عند كل سنة، علق على النتيجة.



4- أوجد الرقم القياسي بالطريقة التجميعية البسيطة عند كل سنة، علق على النتيجة.

5- قدر الإستهلاك الشهري لعائلتك من كل مادة من المواد المذكورة في الجدول واحسب الرقم القياسي المرجح بالكميات بالإعتماد على أسعار سنة 2000.

6- أوجد معدل النمو في كل حالة من الحالات المطلوبة في الأسئلة السابقة.

تمرين4: البيانات التالية خاصة بتطور متوسط أسعار مجموعة من المواد بالأسعار الجارية في الجزائر ، حسب أرقام الديوان الوطني للإحصائيات.(بالدينار الجزائري)

المادة/سنة	1990	1991	1992	1996
خبز.(250غ)	0.83	0.83	1.39	7.5
أرز(كلغ)	7.60	9.16	14.22	47.0
لحم خروف(كلغ)	142.15	181.02	211.93	370.0
لحم دجاج(كلغ)	43.34	54.37	63.55	120.0
حليب (ل)	1.75	1.84	3.17	38.0
زبدة (كلغ)	35.02	76.34	128.25	230.0
زيت (5ل)	24.92	27.49	75.66	320.0
عدس (كلغ)	8.15	10.12	15.40	70.0
فاصولياء (كلغ)	7.89	10.13	14.89	75.0
بطاطا (كلغ)	7.74	9.39	8.14	30.0
سكر (كلغ)	3.69	5.29	14.71	42.0
قهوة (250غ)	25.54	26.53	30.21	120.0

المطلوب: 1-أوجد جميع الأرقام القياسية الممكنة وقارن بينها ، وذلك بإستعمال سنة 1990 كأساس ، ثم سنة 1992 كأساس .

2-أوجد الأرقام القياسية: باش ، لاسبيرس، فيشر ، وذلك حسب الكميات المستهلكة أسبوعيا في أسرتك خلال السنوات 1990 ، 1991 ، 1992 ، 1996 ، وذلك بإستعمال مرة سنة 1990 كأساس ، وأخرى سنة 1992 كأساس.



تمرين5: البيانات التالية تظهر تطور أسعار المواد الأولية و الكميات المستخدمة لإنتاج الأحذية في إحدى الورشات خلال الفترة 1990-1995:

المواد	الأسعار		الكميات	
	1990	1995	1990	1995
جلود طبيعية	20	25	10	12
جلود بلاستيكية	5	15	12	8
صفائح بلاستيكية	10	12	5	5
غراء	5	8	15	10
طلاء	4	4	20	20

المطلوب : 1- أوجد واشرح الأرقام القياسية باستعمال:

أ- طريقة لاسبير. ب- طريقة باش. ج- طريقة فيشر.

2- أوجد الرقم القياسي المرجح بالوسط الحسابي للكميات.

3- استنتج معدلات النمو من الطرق : ا ، ب ، ج و فسرها.

تمرين6: البيانات التالية خاصة بتطور أسعار مجموعة من السلع الإستهلاكية الأساسية بالدينارات الجزائرية .

مادة/سنة	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
حليب	1.5	2.0	2.5	3.0	5.5	8.5	10.0
خبز	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
قهوة	6.0	8.0	10.0	30.0	50.0	90.0	110.0
سكر	3.0	4.0	6.0	9.0	12.0	30.0	40.0
صابون	3.0	4.0	12.0	10.0	15.0	30.0	40.0

المطلوب: 1- أوجد معدل النمو السنوي المتوسط لكل مادة.

2- أوجد الرقم القياسي ذو الأساس المتحرك و فسره.



قائمة المراجع

أولا : باللغة العربية:

1- **أنيس كنجو** . الإحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمـــي. ج1. مؤسسة الرسالة. ط2. 1982.

2- **دومينيك سالفاتور**. الإحصاء و الإقتصاد القياسي - سلسلة ملخصـــات شوم - دار ماكجر وهيل للنشر.د.م.الجامعية. 1983.

4- **د. عبدالعزيز هيكل**. مبادىء الأساليب الإحصائية. دار النهضة العربيـــة- بيروت. 1974.

5- **د.عبدالقادر حليمي** . مدخل الى الإحصاء . ديوان المطبوعات الجامعيـــة- الجزائر. 1993.

6- **د. عصام عزيز شريف**. مقدمة في القياس الإقتصادي. ديوان المطبوعـــات الجامعية -الجزائر. ط: 1981.

7- **محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض** . مقدمة في الإحصاء. ديوان المطبوعات الجامعية - الجزائر. 1984.

8-المجموعة الإحصائية السنوية.د.و.للإحصائيات. 1994

9-**ناظم حيدر**- الوسيط في الإحصاء التطبيقي - دار الكتاب -1977 ط2.

10- **أحمد عبادة سرحان**. العينات. القاهرة .بدون سنة.

11-**عبدالسلام أبو قحف**. التسويق مدخل تطبيقي. دار الجامعـــة الجديـــدة. الإسكندرية. 2002.



ثانيا: باللغة الفرنسية:

1-**C.Labrousse.** Statistique Exercices Corrigés 1 . Dunod.1975.
2-**G.Calot.**Cours De statistique Descriptive .Dunod. Paris. .1975
3- **Hamdani Hocine.** Statistique Descreptive Et Expression Graphique. O.P.U.1998
4-**J.Lecaillon Et C.Labrousse.** Statistique Descriptive . Cujas. Paris.
5-**J.Leurion.** Statistique (Mathematique Appliquées). T2. Foucher. 1970.
6- **Murray R. Spiegel .** Theorie Et Applications De La Statistique.Serie Schaum . 1983.
7- **P. pacé Et R.Cluzel** . Statistique Et Probabilité . T1.Delagrave.
8-Pierre Bailly. Exercices corrigés de statistique descriptive. O.P.U. 1993



فهرس المواضيع



أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية - بن عكنون الجزائر